

MT10110 Aseiniad 4: Fectorau – Planau a Chinemateg
DATRYSIADAU

1. $z = 0$.

2. $2(x - 5) - 2(y - 1) + 4(z - 2) = 0$ neu $x - y + 2z = 8$. Does dim gwahaniaeth os newidiwn arwydd $\underline{n}$.

3. (a) Darganfyddwn y normal yn gyntaf: $\underline{n} = (\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\underline{j} - 9\underline{k}$.

Yna, hafaliad y plân yw $0(x - 5) + 6(y - 1) - 9(z - 2) = 0$ neu $2y - 3z + 4 = 0$.

(b) Mae enrhifo $2y - 3z$ ar $(10, 3, 1)$ yn rhoi 3, felly hafaliad y paralel yw $2y - 3z - 3 = 0$.

(c) Rhoddir y pellter rhyngddynt gan $\Delta = \overrightarrow{PS} \cdot \underline{\hat{n}}$, gyda $\overrightarrow{PS} = (10\underline{i} + 3\underline{j} + \underline{k}) - (5\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k})$ ac $\underline{\hat{n}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{j} - \frac{3}{\sqrt{13}}\underline{k}$.

Felly mae $\Delta = \frac{(10 - 5) \times 0 + (3 - 1) \times 2 + (1 - 2) \times (-3)}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$.

4. Darganfyddwn y normal yn gyntaf: $\underline{n} = (\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20\underline{i} - 7\underline{j} - \underline{k}$.

Yna, hafaliad y plân yw $-20(x - 3) - 7(y + 2) - (z + 1) = 0$ neu $20x + 7y + z = 45$.

Y pellter o'r tarddbwynt yw $\Delta = |\underline{a} \cdot \underline{\hat{n}}| = \frac{|-60 + 14 + 1|}{\sqrt{450}} = \sqrt{\frac{45}{10}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

5. (a) Darganfyddwn pwynt ar y llinell croestoriad rhwng A a B ; er enghraifft, rhowch $z = 0$ a datrysych yr hafaliadau cydamserol $3x - 4y = 2$ a $-2x + y = 1$ i roi $(-\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}, 0)$.

Mae cyfeiriad y llinell yn baralel i $\underline{n}_A \wedge \underline{n}_B = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 11\underline{i} + 7\underline{j} - 5\underline{k}$,

felly'r llinell yw $\underline{r} = \left(-\frac{6}{5} + 11\lambda\right)\underline{i} + \left(-\frac{7}{5} + 7\lambda\right)\underline{j} - 5\lambda\underline{k}$.

(b) Ailadroddwch ar gyfer A a C : pwynt ar y llinell yw $(-\frac{1}{5}, 0, \frac{13}{5})$.

$\underline{n}_A \wedge \underline{n}_C = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -3\underline{i} - 5\underline{j} - 11\underline{k}$, ac felly'r llinell yw $\underline{r} = \left(-\frac{1}{5} + 3\lambda\right)\underline{i} + 5\lambda\underline{j} + \left(\frac{13}{5} + 11\lambda\right)\underline{k}$, lle rydym

wedi tynnu'r arwydd minws i mewn i λ .

(c) Yr ongl rhwng B a C yw'r ongl rhwng eu normalau. Felly $\cos \theta = \underline{\hat{n}}_B \cdot \underline{\hat{n}}_C = \frac{-2 - 5 - 6}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = -\frac{13}{\sqrt{420}}$. Ar gyfer yr ongl lem, $\cos \theta = \frac{13}{\sqrt{420}}$.

6. (a) Cymerwch y lluoswm fector o'r fectorau i wneud fector sy'n berpendicwlar i'r ddau: $\underline{n}^* = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$2\underline{i} + 3\underline{j} + 7\underline{k}$.

Mae $\underline{\hat{n}}^* = \frac{2}{\sqrt{62}}\underline{i} + \frac{3}{\sqrt{62}}\underline{j} + \frac{7}{\sqrt{62}}\underline{k}$ yn fector uned.

(b) Mae gan plân sy'n berpendicwlar i'r croestoriad o'r ddau blân yma normal $\underline{n}^*$. Os yw'n pasio trwy $(1, 1, 1)$ yna ei hafaliad yw $2(x - 1) + 3(y - 1) + 7(z - 1) = 0$, neu $2x + 3y + 7z = 12$.

7. Y pellter yw 1.

Ysgrifennwch $S : (3, 2, 1)$ a dewiswch bwynt ar y plân, e.e., $P : (0, 0, 0)$. Y normal i $z = 0$ yw $\underline{n} = 1\underline{k}$. Felly $\overrightarrow{PS} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k}$ ac mae $|\overrightarrow{PS} \cdot \underline{\hat{n}}| = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 1$.

8. Gallwn ddefnyddio'r fformiwla $\Delta = |ax + by + cz - d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ gydag $a = 3, b = -\sqrt{15}, c = 5$ a $x = 2, y = \sqrt{15}, z = -1$ sy'n rhoi $\Delta = |6 - 15 - 5 - 12|/\sqrt{9 + 15 + 25} = 26/7$.

9. Y normal i'r plân yw $\underline{n} = 20\underline{i} + 7\underline{j} + \underline{k}$, gyda maint $\sqrt{450}$. Mae $P : (0, 0, 55)$ yn bwynt ar y plân, felly $\overrightarrow{PS} = -55\underline{k}$. Yna mae $|\overrightarrow{PS} \cdot \underline{\hat{n}}| = |-\frac{55}{\sqrt{450}}| = \frac{11}{3\sqrt{2}}$.

10. Yr amser yw 200 eiliad (nodwch yr unedau!)

11. $\underline{v} = 10\underline{i} + 10\underline{j} + 2t\underline{k}$. Pan mae $t = 10$ mae hyn yn $\underline{v} = 10\underline{i} + 10\underline{j} + 20\underline{k}$.
 $\underline{a} = 2\underline{k}$, gyda maint 2 pob amser.

12. $\underline{r}_1 = \underline{i} + 5\underline{j} + t\underline{i}$ a $\underline{r}_2 = 3\underline{i} - 1\underline{j} + 2t\underline{j}$. Y sgwâr o'r pellter rhwngddynt yw

$$|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2 = |(3 - (1 + t))\underline{i} + (-1 + 2t - 5)\underline{j}|^2 = |(2 - t)\underline{i} + (-6 + 2t)\underline{j}|^2 = (2 - t)^2 + (2t - 6)^2 = 5t^2 - 28t + 40.$$

Mae hyn ar ei leiaf pan mae $10t - 28 = 0$, neu $t = 2.8$, sef yr amser pan maent agosaf (2 awr a 48 munud). Eu pellter pryd hynny yw $\sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

13. Safle'r anrheg yw $\underline{r}_A = 7\underline{i} + 3\underline{j}$, ac ar gyfer y plant mae $\underline{r}_D = \underline{i} - 3\underline{j}$ a $\underline{r}_B = 8\underline{j}$.

I gyrraedd yr anrheg, mae Dani yn symud yn y cyfeiriad $\underline{r}_A - \underline{r}_D = 6\underline{i} + 6\underline{j}$, sydd â phellter $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Mae Bari yn symud yn y cyfeiriad $\underline{r}_A - \underline{r}_B = 7\underline{i} - 5\underline{j}$, sydd â phellter $\sqrt{74}$.

Felly Dani sy'n cyrraedd gyntaf.

14. $\underline{v}_{sc} = \frac{30}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{30}{\sqrt{2}}\underline{j}$ a $\underline{v}_{ll} = -\frac{10}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{10}{\sqrt{2}}\underline{j}$.

Felly'r cyflymder perthynol yw $\underline{v}_{bc} = \underline{v}_b - \underline{v}_{sc} = -\frac{40}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{20}{\sqrt{2}}\underline{j}$.

Felly mae'n ymddangos i Sion Corn fod y llong yn symud gyda buanedd $\sqrt{\frac{40^2 + 20^2}{4}} = 10\sqrt{10}$ yn y cyfeiriad a roddir gan $\tan \theta = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, h.y., o gwmpas 26° i'r de o'r gorllewin.

15. Differwn $\underline{r} = \frac{1}{2}(t^2 - 3t)\underline{i} + 2t\underline{j}$ i gael $\underline{v} = (t - \frac{3}{2})\underline{i} + 2\underline{j}$ ac $\underline{a} = \underline{i}$.

Sgwâr o'r buanedd yw $|\underline{v}|^2 = (t - \frac{3}{2})^2 + 2^2 = t^2 - 3t + \frac{25}{4}$. Mae hyn ar ei leiaf pan mae $2t - 3 = 0$, h.y., $t = \frac{3}{2}$. Yna

$|\underline{v}_{\min}| = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$, fel y gofynir.

16. Cyflymder A mewn perthynas â'r gwynt yw $\underline{v}_{Aw} = (\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j})v$. Ei safle yw $\underline{r}_A = 60\underline{i} + 90\underline{j} + t((\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j})v + \underline{w})$ gan fod $\underline{v}_{Aw} = \underline{v}_A - \underline{w}$ (gyda t mewn oriau).

Pan mae $t = 1$ awr, mae $132\underline{i} + 175\underline{j} = (60 + \frac{3}{5}v)\underline{i} + (90 + \frac{4}{5}v)\underline{j} + \underline{w}$ (†).

Cyflymder B mewn perthynas â'r gwynt yw $\underline{v}_{Bw} = (\frac{7}{25}\underline{i} - \frac{24}{25}\underline{j})v$. Ei safle yw $\underline{r}_B = 60\underline{i} + 90\underline{j} + t((\frac{7}{25}\underline{i} - \frac{24}{25}\underline{j})v + \underline{w})$ gan fod $\underline{v}_{Bw} = \underline{v}_B - \underline{w}$.

Pan mae $t = 1$ awr, mae $100\underline{i} - \underline{j} = (60 + \frac{7}{25}v)\underline{i} + (90 - \frac{24}{25}v)\underline{j} + \underline{w}$.

Mae tynnu'r mynegiant yma ar gyfer B o'r mynegiant ar gyfer A (†) yn rhoi $32\underline{i} + 176\underline{j} = \frac{8}{25}v\underline{i} + \frac{44}{25}v\underline{j}$. Felly mae $v = 100$ km/h.

Nawr amnewidwch yn ôl mewn i (†) i ddarganfod $\underline{w} = (132 - (60 + 60))\underline{i} + (175 - (90 + 80))\underline{j} = 12\underline{i} + 5\underline{j}$ km/h.