

MT10110 Aseiniad 2: Geometreg Gyfesurynnol – Cylchoedd, Polar, Loci a Chonigau
DATRYSIADAU

1. (a) Os yw $A : (-3, 8)$ a $B : (5, 2)$ yna mae $|AB| = 10$ felly'r radiws yw 5. Canolbwynt AB yw $(1, 5)$. Then $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$, neu $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$.
(b) Amnewidwch $x = 3, y = -1$ yn yr hafaliad i gael: $3^2 + 1 - \lambda - 2 = 0$, felly mae $\lambda = 8$. Yna mae $x^2 + y^2 + 8y - 2 = 0$.
2. (a) Mae $S(x, y) = x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2}$. Yn y ffurf safonol mae $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ a $c = -\frac{1}{2}$. Felly canol y cylch yw $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a'i radiws yw $r^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$, felly $r = 1$.
(b) Hafaliad tangiad i gylch ar (x_1, y_1) yw $(x_1 + a)x + (y_1 + b)y + ax_1 + by_1 + c = 0$. Yn yr achos yma mae $(x_1 - \frac{1}{2})x + (y_1 - \frac{1}{2})y - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2} = 0$.
i. $S(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = 0$, felly mae'r pwynt yma ar y cylch. Hafaliad y tangiad yw $2x - 3 = 0$.
ii. $S(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}), 0) = 0$, felly mae'r pwynt yma ar y cylch. Hafaliad y tangiad yw $2\sqrt{3}x - 2y - (3 + \sqrt{3}) = 0$.
3. (a) Ysgrifennwch $S(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 2$. Trwy gymharu â ffurf safonol, mae $a = 1$ a $b = 2$, felly mae'r canol ar $(-1, -2)$ a'r radiws yw $r = \sqrt{7}$.
(b) Mae $S(4, 3) = 16 + 9 + 8 + 12 - 2 = 43$, felly'r pellter tangiadol yw $\sqrt{43}$.
4. Mae gennym $x = 5$ ac $y = 12$. Felly $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ a $\theta = \tan^{-1}(12/5)$ (sydd yn fras $\approx 67^\circ$).
5. Mae $xy = x + y$ yn dod i $r^2 \sin \theta \cos \theta = r(\cos \theta + \sin \theta)$, felly $r = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \operatorname{cosec} \theta + \sec \theta$, fel sydd ei angen.
6. Ehangwch y $\cos 2\theta$ i gael $r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1 + r \cos \theta$. Nawr amnewidwch y cyfesurynnau Cartesaidd i gael $x^2 - y^2 = 1 + x$.
7. Amnewidwch x ac y mewn ffurf polar: $(r \cos \theta - 3)^2 + (r \sin \theta + 4)^2 = 2$. Daw hyn i $r^2 - 6r(\cos \theta - \frac{4}{3} \sin \theta) + 23 = 0$, y gellir ei ysgrifennu fel $r^2 - 6r \cos(\theta + \theta_0) / \cos \theta_0 + 23 = 0$, lle mae $\tan \theta_0 = \frac{4}{3}$ ac felly $\cos \theta_0 = \frac{3}{5}$. Felly hafaliad polar y cylch yw $r^2 - 10r \cos(\theta + \theta_0) + 23 = 0$ gyda $\theta_0 = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$.
8. Tybiwch fod y cylch wedi'i leoli yn y tarddbwynt: $x^2 + y^2 = 16$. Ysgrifennwch $S(x, y) = x^2 + y^2 - 16$, felly'r pellter tangiadol yw $3 = \sqrt{S(x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$. Mae ehangu yn rhoi $x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25$ sy'n gylch gyda'r un canol ond radiws o 5.
9. Heb golli cyffredinoled, symudwn y cylch i'r tarddbwynt a rhoi'r radiws yn hafal i 1; gallwn symud a chwyddo'r cylch wedyn os oes angen.
Os mai $(\hat{x}, \hat{y})$ yw cyfesurynnau P yna mae $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$. Ysgrifennwch cyfesurynnau K fel (a, b) . Galwch ganolbwynt PK yn M , gyda chyfesurynnau (x, y) , oherwydd rydym am ganfod mudiant M .
Trwy ddiffiniad y canolbwynt, mae $x = \frac{1}{2}(a + \hat{x})$ ac $y = \frac{1}{2}(b + \hat{y})$. Nawr amnewidwch ar gyfer $P : (\hat{x}, \hat{y})$ i gael $(2x - a)^2 + (2y - b)^2 = 1$. Ad-drefnwch i gael $x^2 + y^2 - ax - by + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 1) = 0$, sy'n gylch gyda chanol $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$ a radiws $r = \frac{1}{2}$, h.y., hanner radiws y cylch gwreiddiol.
10. (a) Hanerydd perpendicwlar AB ;
(b) Dau linell syth hanner-anfeidraidd o A ar ongl θ i AB ;
(c) Mae ongl $\widehat{APB}$ yn ongl sgwâr, felly mae P ar gylch gyda diamedr AB ;
(d) Cylch gyda radiws $\frac{1}{2}|AB| + 1$. Hefyd, os yw $|AB| > 2$, cylch o radiws $\frac{1}{2}|AB| - 1$;
(e) Dau arc gyda chord AB (arciau hir os yw $\theta < \pi/2$, arciau byr os yw $\theta > \pi/2$).
11. Ysgrifennwch $P : (x_1, y_1), Q : (x_2, y_2)$ a chanolbwynt PQ fel $M : (x, y)$. Mae $Ax_1 + By_1 + C = 0$ ac $Ax_2 + By_2 + D = 0$. Mae gan y canolbwynt gyfesurynnau $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$, felly gallwn amnewid $x_1 = 2x - x_2$ ac $y_1 = 2y - y_2$ i mewn i $Ax_1 + By_1 + C = 0$ i gael $Ax + By + \frac{1}{2}(C - Ax_2 - Bx_2) = 0$. Ond rydym yn gwybod fod $-Ax_2 - Bx_2 = D$, felly hafaliad y llinell yw $Ax + By + \frac{1}{2}(C + D) = 0$; ei oled yw $-\frac{A}{B}$, sydd yr un peth â'r goled y ddau linell pa roddir yn y cwestiwn, felly maent yn baralel.

12. Boed i $K : (a, b)$, fel bod $P : (x = \frac{1}{2}(a+2), y = \frac{1}{2}b)$.

- (a) Fan yma mae $a = 0$, felly hwn yw'r llinell $x = 1$, sy'n baralel i'r echelin y .
- (b) Mae gennym bod $b = a - 1$, felly $2x = a + 2$ a $2y = a - 1$; ac mae dileu a yn rhoi'r llinell $2x - 2y - 3 = 0$ sy'n baralel i'r llinell a roddir.
- (c) Mae $a^2 + b^2 = 1$, felly mae $(2x - 2)^2 + (2y)^2 = 1$, neu $x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$. Mae hwn yn gylch â chanol $(1, 0)$ a radiws $\frac{1}{2}$.

13. Yr echreiddiad yw'r pellter o'r pwynt i'r ffocws wedi'u rannu â'r pellter i'r cyfeirlin.

- (a) $e = \frac{1}{2}$, elips;
- (b) $e = \frac{3}{3} = 1$, parabola;
- (c) $e = \frac{\sqrt{5}}{4}$, elips;
- (d) $e = \frac{5}{6}$, elips;

14. Heb golli cyffredinoled, cymrwch y ffocws i fod ar y tarddbwynt, yna mewn cyfesurynnau polar, y conig yw $r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}$.

Gwerth $\Delta = \frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$ yw swm cilyddion y pellterau o'r tarddbwynt ar gyfer y pwyntiau A a B . Yna, os yw θ yn dynodi llethr ℓ , mae:

$$\Delta = \frac{1}{r(\theta)} + \frac{1}{r(\theta + \pi)} = \frac{1 + e \cos \theta}{ke} + \frac{1 + e \cos(\theta + \pi)}{ke} = \frac{(1 + e \cos \theta) + (1 - e \cos \theta)}{ke} = \frac{2}{ke}$$

sy'n gyson ar gyfer unrhyw gonig penodol, gan fod pob un conig gyda k ac e sy'n sefydlog.

15. Rhoddir goled y tangiad gan $\frac{dy}{dx}$; mae differu ymhlyg yn rhoi $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$, sy'n hafal i $\frac{1}{2}$ ar y pwynt penodol. Yna hafaliad y tangiad yw $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, neu $x - 2y + 1 = 0$.

16. (a) Goledd y tangiad yw $\frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$. Felly goled y normal yw $-t$.

Tangiad: $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, neu $x - ty + at^2 = 0$;

Normal: $y - 2at = -t(x - at^2)$, neu $tx + y - 2at - at^3 = 0$.

(b) Mae'r gyfeirlin yn gorwedd ar hyd $x = -a$, felly cyfesurynnau unrhyw bwynt ar y gyfeirlin yw $(-a, b)$ ar gyfer rhyw $b \in \mathbb{R}$. Hafaliad tangiad y parabola yw $x - ty + at^2 = 0$. Mae amnewid yn rhoi $-a - tb + at^2 = 0$ sy'n cwadratig ar gyfer t gyda ddatrysiaid $t^{\pm} = \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2})$ - dau ddatrysiaid real, felly mae yna ddau dangiad posib.

Mae gan pob un ohonynt oled $1/t$, ac os ydynt yn orthogonol, yna dylai lluosymau eu goledau fod yn -1 . Y lluoswm hyn yw:

$$\frac{1}{t^+ t^-} = \frac{2a}{(b + \sqrt{b^2 + 4a^2})} \frac{2a}{(b - \sqrt{b^2 + 4a^2})} = \frac{4a^2}{b^2 - (b^2 + 4a^2)} = -1,$$

fel y gofynnir.

(c) Ar gyfer pob gwerth o $t^{\pm}$, mae'r tangiad yn cwrdd a'r cromlin ar $(at^{\pm 2}, 2at^{\pm})$. Goledd y llinell rhwng y pwyntiau yma yw

$$m = \frac{2a(t^+ - t^-)}{a(t^{+2} - t^{-2})} = \frac{2}{t^+ + t^-} = \frac{2a}{b},$$

ac felly ei hafaliad yw $y - 2at^+ = \frac{2a}{b}(x - at^{+2})$ neu

$$y = \frac{2a}{b}x + 2at^+ - \frac{2a^2}{b}t^{+2} = \frac{2a}{b}x + \frac{2a}{b}(bt^+ - at^{+2}) = \frac{2a}{b}x - \frac{2a^2}{b}$$

o'r cwadratig mewn t . Felly mae $y = 0$ pan mae $x = a$, fel y gofynnir.

17. Graddiant y tangiad yw $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{t^2}$ ac felly mae ei hafaliad yw $y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t)$, neu $x + t^2y - 2t = 0$. Mae'n cwrdd yr echelin- x ar $A : (2t, 0)$, a'r echelin- y ar $B : (0, \frac{2}{t})$. Arwynebedd y triongl AOB yw $\frac{1}{2} \times 2t \times \frac{2}{t} = 2$, sy'n annibynnol o t .

18. Gallwn gyfrifo goled y tangiad $\frac{dy}{dx}$ trwy ddifferu'n ymhlyg yr hafaliad elips: $\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0$. Gan ei fod yn berpendicwlar i'r tangiad, goled y normal yw $-\frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x} = \frac{a^2}{b^2} \frac{b \sin \theta}{a \cos \theta} = \frac{a}{b} \tan \theta$, fel y gofynnir.