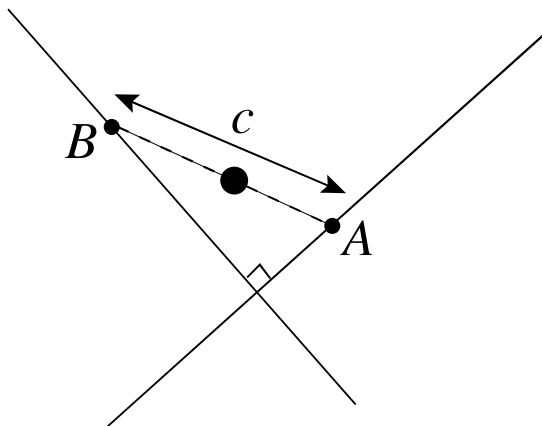


1.3 Locws pwynt

Locws y pwynt P yw'r *llwybr* mae'n ei ddilyn o dan amodau penodol. Er enghraifft,

- (i) locws pwynt sydd a'i bellter o bwynt sefydlog (a, b) yn R yw cylch, canol (a, b) , radiws R ;
- (ii) os llinell sefydlog yw l , locws pwynt P sydd a'i bellter o l yn d yw dau linell sy'n baralel i l ;
- (iii) os yw llinellau gwahanol yw k a l ac mae P yr un pellter o k a l ill dau, yna mae dau achos i'w ystyried: naill ai bod k a l yn baralel, ac felly locws P yw llinell syth sy'n baralel i l a k ac sydd hanner ffordd rhwngddynt; neu os nad yw k a l yn baralel, yna locws P yw'r ddau hanerydd onglog k a l .

Enghraifft 1.20. Mae pwynt A yn symud ar linell k ac mae pwynt B yn symud ar linell l sy'n berpendicwlar i k fel bod yr hyd AB yn gyson, c . Beth yw locws canolbwynt AB ?



Enghraifft 1.21. Mae pwynt P yn symud fel bod ei bellter o'r pwynt $(1,1)$ yn hanner y pellter o'r pwynt $(-1,1)$. Darganfyddwch ei locws.

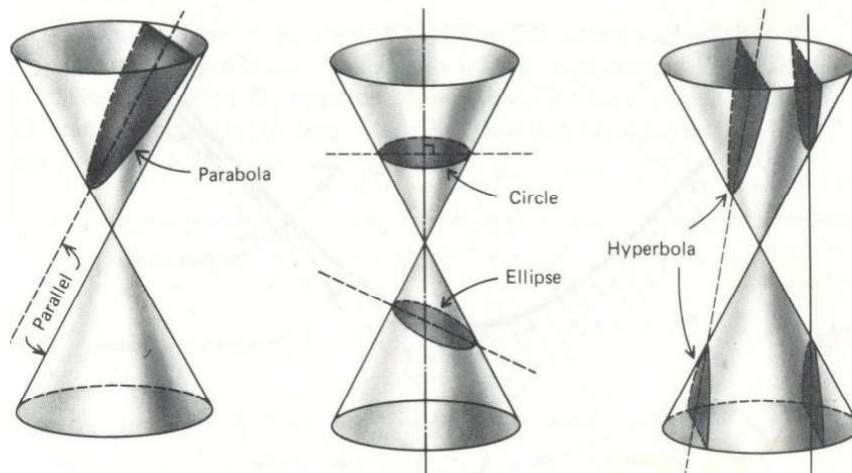
Enghraifft 1.22. Mae pwynt P yn symud fel ei fod yr un pellter o'r llinell $y = -1$ a'r pwynt $(0,2)$. Darganfyddwch ei locws.

Enghraifft 1.23. Mae pwynt P yn symud fel bod ei bellter o'r pwynt $(2,0)$ yn ddau yn is na'i bellter o'r pwynt $(-2,0)$. Darganfyddwch ei locws.

Enghraifft 1.24. Mae pwynt P yn symud fel bod y swm ei bellteroedd o'r pwyntiau $(0,2)$ a $(0,-2)$ yn gyson, $2c$. Darganfyddwch ei locws os yw $c > 2$.

1.4 Trychiad conig

Gelwir parabolâu, elipsau (yn cynnwys y cylch fel achos arbennig) a hyperbolâu yn *drychiadau conig*, neu conigau, oherwydd gallwn eu delweddu fel toriadau (neu trychiadau) trwy côn ddwbl, fel y dangosir yn ffigur isod.



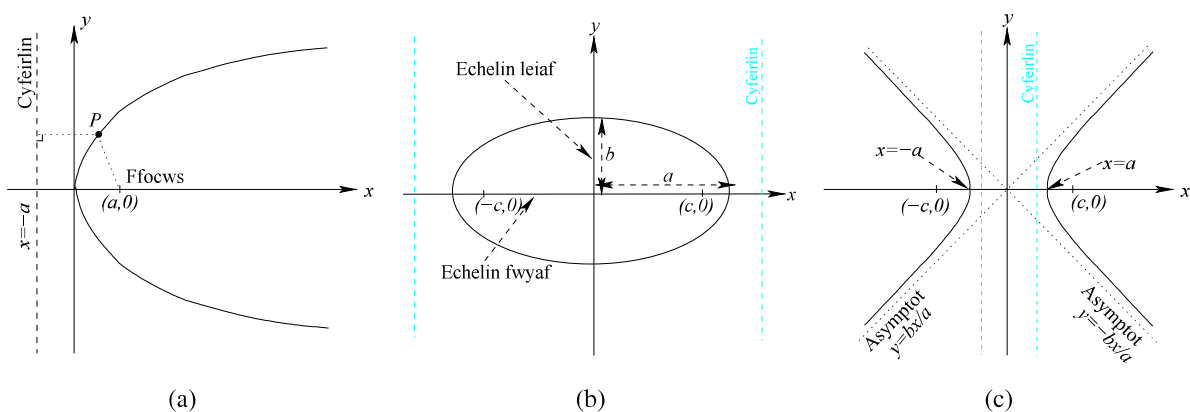
Gellir roi diffiniad arall, fel yr uchod, yn nhermau locws pwynt (gweler ffigur 1):

Diffiniad 1.10.

Y **parabola** yw'r set o bwyntiau yn y plân sy'n gytbell o bwynt sefydlog penodol (y ffocws) a llinell sefydlog benodol (y cyfeirlin). Yn ei ffurf safonol mae'r ffocws wedi'i lleoli yn $(a, 0)$, tra bod cyfeirlin yn $x = -a$, a hafaliad y parabola yw $y^2 = 4ax$.

Yr **elips** yw'r set o bwyntiau yn y plân sydd â'u pellterau o ddau bwynt sefydlog penodol (y ffocysau) yn symio i gysonyn. Yn ei ffurf safonol mae'r ffocysau wedi'u lleoli yn $(\pm c, 0)$, swm y pellteroedd o'r ffocysau yw $2a$, a hafaliad yr elips yw $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gyda $b^2 = c^2 - a^2$.

Yr **hyperbola** yw'r set o bwyntiau yn y plân lle mae gwahaniaeth eu pellteroedd o ddau bwynt sefydlog penodol (y ffocysau) yn gyson. Yn ei ffurf safonol mae'r ffocysau wedi'u lleoli yn $(\pm c, 0)$, gwahaniaeth y pellteroedd o'r ddau ffocws yw $2a$, a hafaliad yr hyperbola yw $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gyda $b^2 = c^2 - a^2$.



Ffigur 1: (a) Parabola. (b) Elips, gyda ffocysau yn $x = \pm c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$. (c) Hyperbola, gyda ffocysau yn $x = \pm c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

Enghraifft 1.25. Dangoswch fod yr hafaliad $y^2 = k(x + k)$ yn cynrychioli parabola. Darganfyddwch ei ffocws a'i cyfeirlin.

Enghraifft 1.26. Dangoswch fod yr hafaliad $x^2 - 3y^2 = 2\alpha y - \alpha^2$ yn cynrychioli hyperbola. Darganfyddwch ei ffocysau a'i asymptotau.

1.4.1 Echreiddiad

Mae echreiddiad elips yn mesur pa mor bell yw e o fod yn gylch. Diffiniwn y rhif ddiddimensiwn

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} < 1.$$

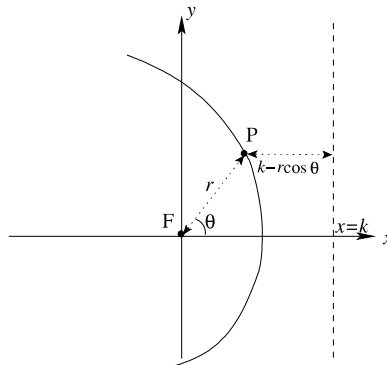
Felly pan fo $b = a$ mae gennym gylch, gyda $e = 0$, ac yn y terfan $b \rightarrow 0$ gwelwn fod $e \rightarrow 1$.

Mae'r diffiniad yma yn estynnu i barabola ($e = 1$) ac ar gyfer hyperbola $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1$ hefyd. Os diffiniwn elips a hyperbola i gael cyfeirlin (tybiannol) ar $x = \pm \frac{a}{e}$, mae hwn yn dod yn bendant: yr echreiddiad yw cymhareb pellter pwynt ar y conig o'r ffocws i'r pellter o'r cyfeirlin.

Felly mae pob pwynt ar elips yn agosach i'r ffocws (agosaf) nag i'r cyfeirlin (agosaf) ($e < 1$); mae pob pwynt ar hyperbola yn bellach o'r ffocws (agosaf) nag i'r cyfeirlin (agosaf) ($e > 1$); mae pob pwynt ar barabola yn gyttell o'r ffocws a'r cyfeirlin ($e = 1$);

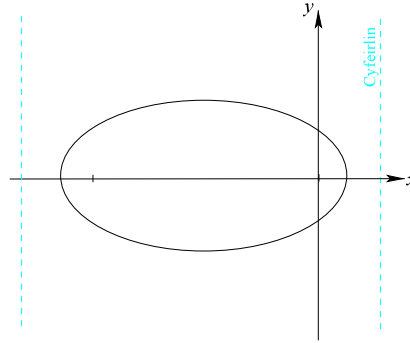
Diffiniad 1.11. Os gosodwn y ffocws ar y tarddbwynt a'r cyfeirlin ar $x = k$ yna hafaliad conig ar ffurf pegynlinol yw $r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}$.

Sylw: I weld hyn nodwch, gan mai'r pellter i'r ffocws dros y pellter i'r cyfeirlin yw'r echreiddiad, mae $e = r/(k - r \cos \theta)$.



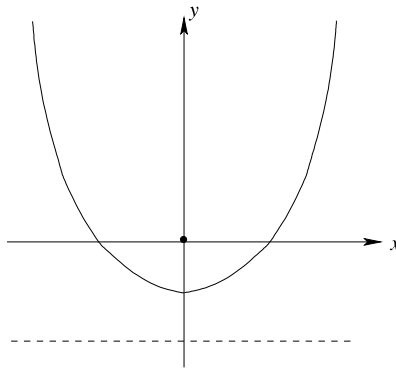
Os oes newid arwydd yn yr enwadur $1 - e \cos \theta$, yna mae'r cyfeirlin wedi'i lleoli yn $x = -k$. Os newidwn $\pm \cos \theta$ i $\pm \sin \theta$, yna mae'r cyfeirlin yn $y = \pm k$, yn ôl eu trefn.

Enghraifft 1.27. Darganfyddwch hafaliad pegynlinol y conig sydd â'i echreiddiad yn $e = \frac{1}{2}$, un o'i ffocysau ar y tardd a'r cyfeirlin cyfatebol ar $x = 1$.



Enghraifft 1.28. Darganfyddwch gyfeirlin y conig gyda'i ffocws ar y tardd ac hafaliad pegynlinol

$$r = \frac{8}{2 - 2 \sin \theta}.$$



1.4.2 Cynrychioliad parametrig y parabola

Gellir ysgrifennu unrhyw bwynt P ar parabola yn nherau paramedr t , e.e. $x = at^2, y = 2at$: gallwn ddileu t o'r ddau fynegiad yma i gael $y^2 = 4ax$, yr hafaliad safonol. Y graddiant yn unrhyw bwynt yw $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$. Felly hafaliad y tangiad i'r elips yw $y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$, neu

$$x - ty + at^2 = 0.$$

Yn yr un modd, hafaliad y normal yw $y - 2at = -t(x - at^2)$, neu $tx + y = at^3 + 2at$.

Enghraifft 1.29. Dangoswch fod y normal i'r parabola $y^2 = 4ax$ ar y pwynt $P:(at^2, 2at)$ yn cwrdd y parabola eto ar y pwynt $(au^2, 2au)$ gyda $u = -\frac{1}{t}(2 + t^2)$.

Sylw: Nid yw cynrychioliad parametrig conig, neu unrhyw gromlin gyffredinol, yn unigryw. Yn ei ffurf safonol, gellir paramedreiddio'r elips gan $x = a \cos t, y = b \sin t$, gyda $t \in (-\pi, \pi]$ yn aml yn cael ei gyfnewid gyda θ . Gellir paramedreiddio ffurf safonol yr hyperbola gan $x = a \sec t, y = b \tan t$, gyda $t \in (-\infty, \infty)$, neu $x = a \cosh u, y = b \sinh u$, gyda $u \in (-\infty, \infty)$.