

2.4 Lluosymiau fectorau

Disgrifiwn bedwar lluoswm fector (mae rhai yn fwy defnyddiol na'r lleill).

2.4.1 Lluoswm sgalar

Diffiniad 2.4. Lluoswm sgalar $\underline{a} \cdot \underline{b}$ y ddau fector $\underline{a}$ a $\underline{b}$ yw'r gwerth sgalar $|\underline{a}||\underline{b}| \cos \theta$, lle θ yw'r ongl rhwng $\underline{a}$ a $\underline{b}$. Ei ffurf cydrannol yw $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Enghraifft 2.12. Darganfyddwch cosin yr ongl rhwng y fectorau $\underline{u} = \underline{i} - 2\underline{j} - 2\underline{k}$ a $\underline{v} = 6\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$.

Sylwadau:

- Mae dau fector ansero yn berpendicwlar os yw eu lluoswm sgalar yn sero (gan fod $\cos \pi/2 = 0$);
- Ar gyfer unrhyw fector $\underline{a}$, mae $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}||\underline{a}| \cos(0) = |\underline{a}|^2$;
- Trwy ddefnyddio cydrannau, mae'n bosib i brofi cymudedd y lluoswm sgalar: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$;
- Trwy ddefnyddio cydrannau, mae'n bosib i brofi dosbarthedd y lluoswm sgalar: $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$.

Gadawyd y ddau brawf olaf fel ymarferiad.

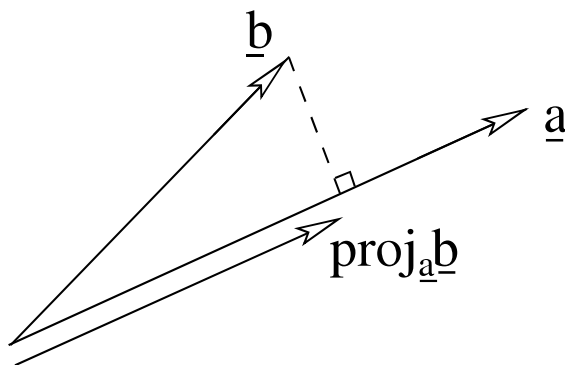
Enghraifft 2.13. Rhewch hafaliad fector y llinell trwy'r pwynt $\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ sy'n berpendicwlar i'r fector $\underline{b} = -\underline{i} + 2\underline{j}$.

Enghraifft 2.14. Fectorau safle y pwyntiau A , B , C , a D yw $-2\underline{i} + 3\underline{j}$, $3\underline{i} + 8\underline{j}$, $7\underline{i} + 6\underline{j}$, and $7\underline{i} - 4\underline{j}$, yn ôl eu trefn. Dangoswch fod AC yn berpendicwlar i BD .

2.4.2 Tafluniad fectorau

Diffiniad 2.5. Diffinir tafluniad fector $\underline{b}$ ar fector $\underline{a}$ i fod cydran $\underline{b}$ yng nghyfeiriad $\underline{a}$, a roddir gan

$$\text{proj}_{\underline{a}} \underline{b} = |\underline{b}| \cos \theta \hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|} \hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}|^2} \underline{a}.$$

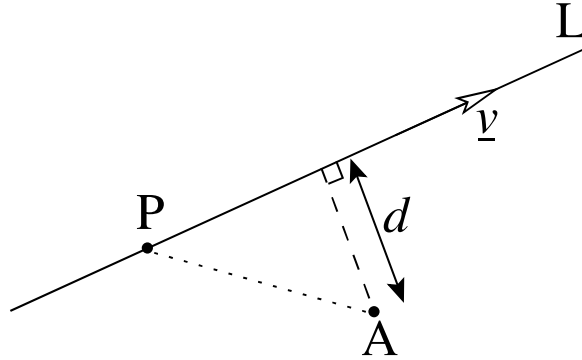


Ei hyd – tafluniad sgalar $\underline{b}$ ar $\underline{a}$ – yw $|\text{proj}_{\underline{a}} \underline{b}| = |\underline{b}| \cos \theta = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{b}|}{|\underline{a}|}$.

Enghraifft 2.15. Darganfyddwch dafluniad $\underline{a} = 2\underline{i} + 5\underline{j}$ ar y fector $\underline{b} = \underline{i} + \underline{j}$.

Enghraifft 2.16. O wybod $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$ a $\underline{b} = 3\underline{i} - 4\underline{k}$, darganfyddwch dafluniad sgalar $\underline{a}$ ar $\underline{b}$.

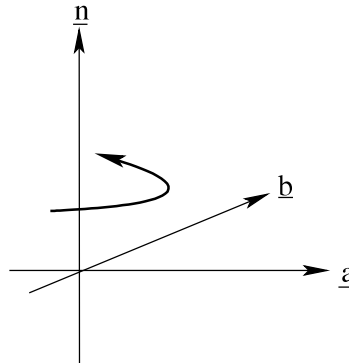
Enghraifft 2.17. Darganfyddwch y pellter perpendicwlar o'r pwynt A sydd â'r fector safle $4\underline{i} + 5\underline{j}$ i'r llinell L sydd â'r hafaliad fector $\underline{r} = -3\underline{i} + \underline{j} + \lambda(\underline{i} + 2\underline{j})$.



Enghraifft 2.18. Darganfyddwch bellter perpendicwlar y pwynt C gyda fector safle $5\underline{i} - 9\underline{j} + 2\underline{k}$ o'r llinell $\underline{r} = 5\underline{i} + 3\underline{j} - \underline{k} + \lambda(2\underline{i} + 5\underline{j} + 7\underline{k})$.

2.4.3 Lluoswm fector

Diffiniad 2.6. Lluoswm fector $\underline{a} \wedge \underline{b}$ y ddau fector $\underline{a}$ a $\underline{b}$ yw'r fector $|\underline{a}||\underline{b}| \sin \theta \hat{n}$, lle mae $\hat{n}$ yn fector uned sy'n berpendicwlar i blân $\underline{a}$ a $\underline{b}$ fel bod $\underline{a}, \underline{b}, \hat{n}$ yn ffurfio set llaw dde.



Yn y ffurf cydrannol, gall y lluoswm fector gael ei ysgrifennu fel determinant:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Enghraifft 2.19. Ar gyfer y fectorau $\underline{a} = 5\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ a $\underline{b} = \underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$, lluoswm sgalar $\underline{a}$ a $\underline{b}$ yw

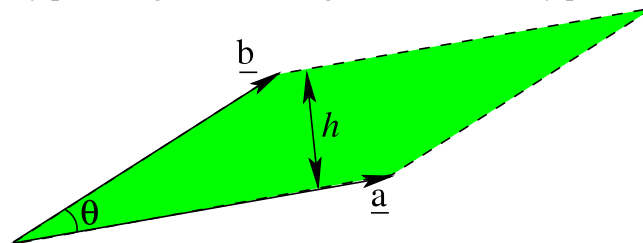
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 5 \times 1 + (-1) \times (-2) + 2 \times 3 = 13$$

a lluoswm fector $\underline{a}$ a $\underline{b}$ yw

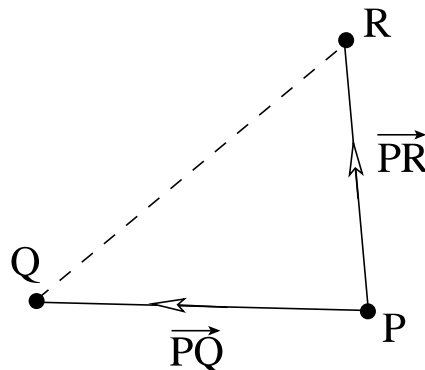
$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i} - 13\underline{j} - 9\underline{k}.$$

Sylwadau:

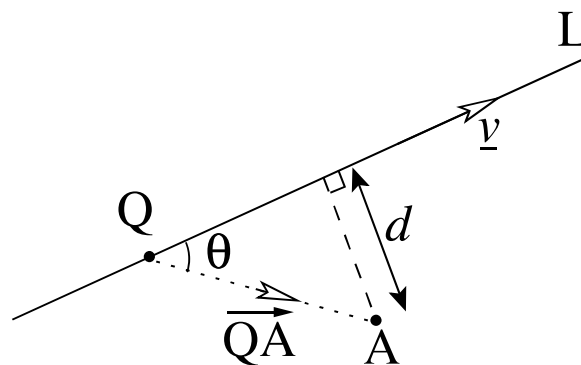
- Hyd y fector canlyniadol yw $|\underline{a} \wedge \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \theta$;
- Mae dau fector ansero yn baralel os yw eu lluoswm fector yn sero (gan fod $\sin 0 = 0$);
- Dyw'r lluoswm fector *ddim* yn yn cymudo. Yn hytrach, mae $\underline{b} \wedge \underline{a} = -(\underline{a} \wedge \underline{b})$;
- Mae'r lluoswm fector yn ddosbarthol: $\underline{a} \wedge (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \wedge \underline{b} + \underline{a} \wedge \underline{c}$;
(Ymarfer: gwiriwch hyn trwy ddefnyddio cydrannau.)
- Ar gyfer y fectorau uned yng nghyfeiriadau yr echelinnau gyfesurynnol mae: $\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, a $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$, but $\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$ a.y.b.;
- $|\underline{a} \wedge \underline{b}|$ yw arwynebedd y paralelogram a ffurfir gan $\underline{a}$ a $\underline{b}$. Uchder y paralelogram yw $h = |\underline{b}| \sin \theta$.



Enghraifft 2.20. Darganfyddwch fector sy'n berpendicwlar i'r plân sy'n cynnwys y pwyntiau $P : (1, -1, 0)$, $Q : (2, 1, -1)$, $R : (-1, 1, 2)$, ac arwynebedd y triongl gyda'r fertigau yma.



Enghraifft 2.21. Ailadroddwch enghraifft 2.17 (darganfyddwch bellter perpendicwlar y pwynt o'r llinell ...) gyda'r fector lluoswm.



Diffiniad 2.7. Lluoswm sgalar driphlyg y fectorau $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ yw

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

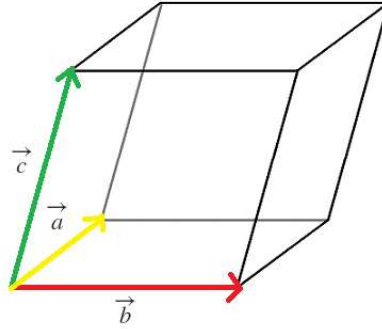
Sylwadau:

- I weld hyn, nodwch fod

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) &= (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \cdot [(b_2 c_3 - b_3 c_2) \underline{i} - (b_1 c_3 - b_3 c_1) \underline{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \underline{k}] \\ &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1), \end{aligned}$$

sy'n canlyn o enrhifo y determinant a roddir.

- Y canlyniad yw sgalar, sy'n cynrychioli cyfaint y paralelepiped a ffurfir gan y tri fector.



- Fectorau wedi'u ailadrodd: $[\underline{a}, \underline{a}, \underline{b}] = 0$ gan fod $\underline{a} \wedge \underline{a}$ yn berpendicwlar i $\underline{a}$.
- Os yw $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ yn ansero ac yn gymhlan, yna mae $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = 0$.

Enghraifft 2.22. Cyfrifwch lluoswm sgalar driphlyg y fectorau $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$ a $\underline{c} = -\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$.

Diffiniad 2.8. Lluoswm fector driphlyg y fectorau $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ yw

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}.$$

Gallwn ddangos y canlyniad yma trwy ddefnyddio cydrannau:

$$\begin{aligned}
\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) &= [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)] \underline{i} \\
&\quad - [a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2)] \underline{j} \\
&\quad + [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)] \underline{k} \\
&= [a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3] \underline{i} \\
&\quad + [-a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2] \underline{j} \\
&\quad + [a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2] \underline{k}
\end{aligned}$$

Nawr adiwn a thynnwn $a_nb_nc_n$ i'r n^{fed} gydran:

$$\begin{aligned}
&= [a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 + a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1] \underline{i} \\
&\quad + [-a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2] \underline{j} \\
&\quad + [a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3] \underline{k} \\
&= [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1] \underline{i} \\
&\quad + [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2] \underline{j} \\
&\quad + [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3] \underline{k} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\underline{i} + c_2\underline{j} + c_3\underline{k}) \\
&= (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}.
\end{aligned}$$

Enghraifft 2.23. Cyfrifwch luoswm fector driphlyg y fectorau $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{b} = 3\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k}$ a $\underline{c} = -\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$.