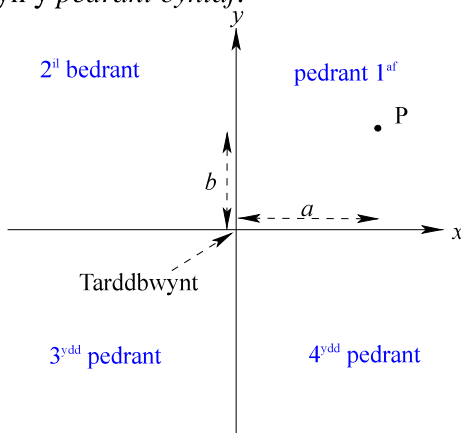


1 Geometreg Cartesaidd (neu geometreg plân dadansoddol)

1.1 Pwyntiau a Llinellau

1.1.1 Pwynt

Ystyriwch bwynt $P(a, b)$, lle mae a a b yn rifau real mympwyol ($a, b \in \mathbb{R}$), mewn perthynas ag echelinau perpendicwlar x (absgisa) ac y (mesuryn); a yw cyfesuryn- x P a b yw'r cyfesuryn- y . Pan mae $a > 0, b > 0$ llunnir yn y *pedrant cyntaf*.



1.1.2 Llinellau

Diffiniad 1.1. Cynrychiolir llinell rhwng dau bwynt P a Q gan yr hafaliad llinol $ax + by + c = 0$, lle mae $a, b, c \in \mathbb{R}$ yn gyson a ni all a na b ill dau fod yn sero.

Diffiniad 1.2. Os yw $b = 0$ yna mae gennym y llinell fertigol $x = \hat{c}$; fel arall gallwn ysgrifennu'r hafaliad yn y ffurf unigryw $y = mx + c$, lle gelwir m y goledd a c y rhyngdoriad.

Enghraifft 1.1. Gallwn ailysgrifennu'r llinell $2x + 3y - 5 = 0$ fel $y = \frac{-2x + 5}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Mae ganddo oled $-\frac{2}{3}$ a rhyngdoriad $\frac{5}{3}$.

Enghraifft 1.2. Yr un llinell yw $6x + 9y - 15 = 0$, oherwydd yn ei ffurf goledd-rhyngdoriad cawn yr union un hafliad: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

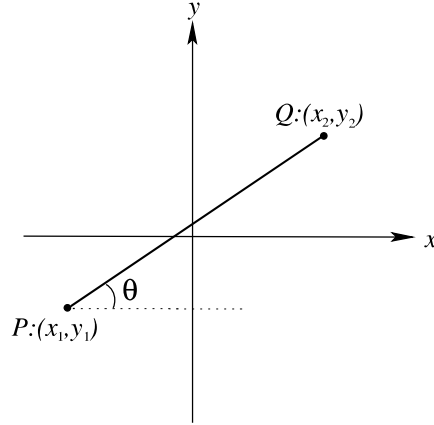
Enghraifft 1.3. Gallwn ailysgrifennu'r llinell $3x + 4 = 0$ fel $x = -\frac{4}{3}$; mae'n llinell fertigol gyda goledd anfeidraidd.

Sylw: Yn gyffredinol, mae gan $ax + by + c = 0$ goled $\begin{cases} -a/b & \text{os yw } b \neq 0 \\ \infty & \text{os yw } b = 0 \end{cases}$.

Diffiniad 1.3. Mae dau linell yn baralel os ¹ mae ganddynt yr un goled. Felly mae gan pob llinell sy'n baralel i $ax + by + c = 0$ hafaliad $ax + by + d = 0$ ar gyfer d mympwyol.

Yn gywerth, mae $ax + by + c = 0$ yn baralel i $a'x + b'y + c' = 0$ os $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$.

¹oss = os a dim ond os



Diffiniad 1.4. O wybod dau bwynt $P:(x_1, y_1)$ a $Q:(x_2, y_2)$ mae gennym:

- y pellter PQ yw $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;
- canolbwynt PQ yw $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$;
- goleddd PQ yw $\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$.

Sylw: Hafaliad y llinell sy'n pasio trwy'r pwynt (x_1, y_1) gyda goleddd m yw

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

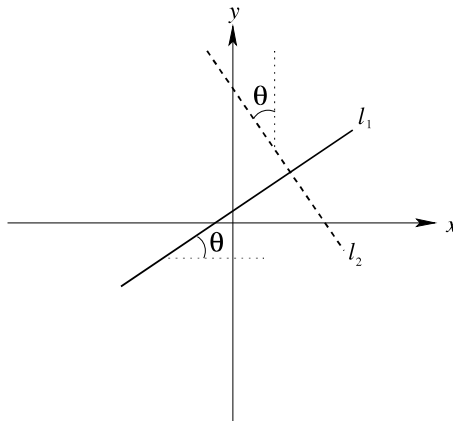
(neu $y - mx = y_1 - mx_1$ neu $mx - y + (y_1 - mx_1) = 0$).

Sylw: Hafaliad y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (x_1, y_1) a (x_2, y_2) , gyda $x_1 \neq x_2$, yw

$$y - y_2 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_2),$$

gyda goleddd $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Diffiniad 1.5. Os fod dau linell $l_1 : y = m_1x + c_1$ a $l_2 : y = m_2x + c_2$ yn berpendicwlar yna mae eu goleddau yn bodloni $m_1m_2 = -1$.



I weld hyn, nodwch os ysgrifennwn $m_1 = \tan(\theta)$, yna mae

$$m_2 = \tan(\pi/2 + \theta) = \frac{\sin(\pi/2 + \theta)}{\cos(\pi/2 + \theta)} = \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)}.$$

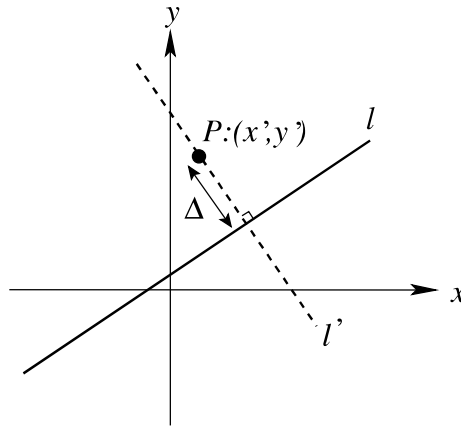
Sylw: Felly hafaliad y llinell sy'n berpendicwlar neu'n *orthogonal* i'r llinell $l_1 : ax + by + c = 0$ yw $bx - ay + d = 0$.

Enghraifft 1.4. Darganfyddwch hafaliadau'r llinellau sy'n baralel ac yn *orthogonal* i $2x + 3y + 5 = 0$ ac yn pasio trwy $P:(2,-5)$.

Sylw: Ysgrifennwn $F(x, y) = ax + by + c$. Mae F yn ffwythiant o ddau newidyn, x ac y . Er enghraifft, $F(1, 0) = a + c$. Hafaliad y llinell yw $F(x, y) = 0$.

1.1.3 Y pellter byrraf o bwynt i linell

Sut allwn ddarganfod y pellter byrraf o bwynt $P:(x', y')$ i linell $l : ax + by + c = 0$? Dylid y pellter byrraf fod ar hyd llinell sy'n perpendicwlar i l , trwy P . Felly darganfyddwn hafaliad y llinell perpendicwlar trwy P , a'r pwynt (x_1, y_1) lle mae'n croestorri l . Y pellter o'r pwynt i'r llinell yw'r pellter rhwng y ddau bwynt yma.



Mae'r perpendicwlar yn cymryd y ffurf $l' : bx - ay + d = 0$. Darganfyddwn d trwy amnewid cyfesurynnau P i roi $l' : bx - ay = bx' - ay'$. Darganfyddwn y croestoriad o l a l' (hafaliadau cydamserol) i fod yn

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-ac + b^2x' - aby'}{a^2 + b^2}, \frac{-bc - abx' + a^2y'}{a^2 + b^2} \right).$$

Yna'r pellter rhwng P a (x_1, y_1) yw (yn ôl Diffiniad 1.4)

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sqrt{(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{(a^2 + b^2)x' + ac - b^2x' + aby'}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{(a^2 + b^2)y' + bc + abx' - a^2y'}{a^2 + b^2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{(a^2x' + ac + aby')^2 + (b^2y' + bc + abx')^2} \\
 &= \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2(ax' + c + by')^2 + b^2(by' + c + ax')^2} \\
 &= \frac{c + ax' + by'}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
 \end{aligned}$$

Os ysgrifennwn $F(x, y) = ax + by + c$, yna $\Delta = \frac{F(x', y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

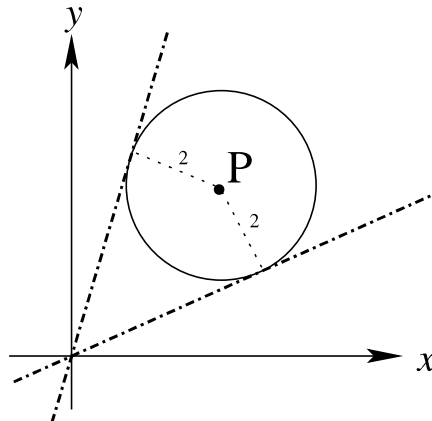
Gan fod rhaid i'r pellter fod yn rif positif, dylwn gymryd y gwerth absoliwt, pellter = $|\Delta|$.

Sylw: Nodwch gallwn enrhifo F ar gyfer unrhyw rif o bwyntiau Q; os yw arwydd $F(x_Q, y_Q)$ yr un peth ag arwydd $F(x_P, y_P)$, yna maent ar yr un ochr o'r llinell.

Enghraifft 1.5. Os l yw'r llinell $5x - 7y + 3 = 0$, yna rhown $F(x, y) = 5x - 7y + 3$. Mae $F(0, 0) = 3$, $F(-3, -2) = 2$, $F(-3, -1) = -5$, ac mae $F(5, 4) = 0$. Felly mae $(5, 4)$ ar y llinell l , mae $(-3, -2)$ ar yr un ochr o'r llinell â'r tarddbwynt, ac mae $(-3, -1)$ ar yr ochr arall.

Enghraifft 1.6. Enrhifwch y pellter perpendicwlar i'r pwynt $P:(2, 5)$ o'r llinell $4x + 7y + 14 = 0$. Ar gyfer pa werthoedd o c ydy'r pwynt $(c, 5)$ ar yr un ochr o'r llinell â P ?

Enghraifft 1.7. Darganfyddwch hafaliadau y llinellau trwy'r tarddbwynt sydd â'i bellter perpendicwlar o $P:(3, 4)$ yn 2.



1.1.4 Llinellau croestoriadol

Ystyriwch ddau linell k ac l gyda'r hafaliadau $F(x, y) = 0$ a $G(x, y) = 0$, yn ôl eu trefn. Gan fod F a G yn ffwythiannau mewn dau newidyn, mae $F(x, y) + \lambda G(x, y)$ yn hefyd, ar gyfer rhyw

gysonyn $\lambda \in \mathbb{R}$. Ymhellach, gan fod F a G yn llinol, mae $F + \lambda G$ yn hefyd; felly mae $F + \lambda G = 0$ yn hafaliad llinell, h dywed.

Os nad yw k ac l yn baralel, yna maent yn croestorri ar ryw bwynt $P:(x_1, y_1)$, ac ar y pwynt yna mae $F(x_1, y_1) = 0$, $G(x_1, y_1) = 0$, ac felly mae $F(x_1, y_1) + \lambda G(x_1, y_1) = 0$. Felly mae (x_1, y_1) ar y llinell h .

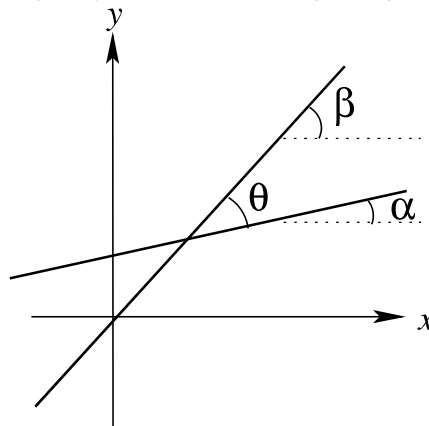
Rydym wedi dangos mai hafaliad cyffredinol llinell trwy groestoriad dau linell gyda hafaliadau $F = 0$ a $G = 0$ yw $F + \lambda G = 0$.

Enghraifft 1.8. Darganfyddwch hafaliad y llinell trwy y pwynt $Q:(1, -1)$ a chroestoriad y llinellau $2x - 7y + 3 = 0$ a $5x + y - 8 = 0$.

Enghraifft 1.9. Darganfyddwch hafaliad y llinell sydd â goled 5 trwy groestoriad y llinellau $2x - 7y + 3 = 0$ a $5x + y - 8 = 0$.

1.1.5 Onglau rhwng llinellau

Ystyriwch dau linell sy'n pasio trwy yr un pwynt (croestorri). Beth yw'r ongl sydd rhyngddynt? Hynny yw, o wybod llinell 1 gyda goled $m_1 = \tan \alpha$ a llinell 2 gyda goled $m_2 = \tan \beta$, beth yw $\tan(\beta - \alpha)$? (Nodwch fod onglau yn cael eu mesur gwrthglocwedd o'r echelin- x positif.)



Ysgrifennwn $\theta = \beta - \alpha$, yna mae

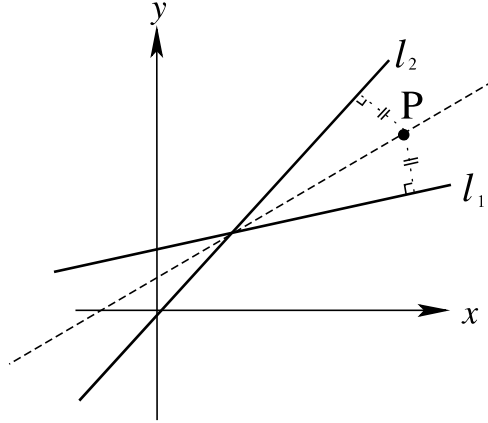
$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Felly, mae dau linell gyda goledau m_1 ac m_2 yn cwrdd ar ongl $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right)$.

Nodwch mai'r datrysiad dilys arall yw $\theta' = \pi - \theta$, a roddir gan $\tan \theta' = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

Enghraifft 1.10. Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinellau $3x - y + 1 = 0$ a $x + 2y - 1 = 0$.

Diffiniad 1.6. Hanerydd Onglog dau linell yw'r llinell sydd â phob un o'i bwyntiau yr un pellter perpendicwlar o bob llinell.



Gan mai pellter y pwynt $P:(x, y)$ o'r llinell $ax + by + c = 0$ yw $\Delta = \pm \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (os rydym yn defnyddio'r arwydd arall yna byddwn yn haneru yr ongl aflem yn lle) yna hafaliad yr hanerydd onglog o $l_1 : ax + by + c = 0$ and $l_2 : a'x + b'y + c' = 0$ yw

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Enghraifft 1.11. Darganfyddwch haneryddion onglog (llym ac aflwm) y llinellau $3x - 4y + 2 = 0$ a $12x + 5y - 2 = 0$.

1.1.6 Unllededd

O wybod y llinell o $A:(x_1, y_1)$ i $B:(x_2, y_2)$, sut ydym yn penderfynnu os yw'r pwynt $P:(\bar{x}, \bar{y})$ ar y llinell? Un posibilid yw i enrhifo arwynebedd y triongl APB: os yw'n sero, yna mae'r pwyntiau yn unllin. Un arall yw i amnewid am P yn hafaliad y llinell i weld os yw'n cael ei fodloni. Dangoswn fod rhain yn gywerth.

Hafaliad llinell AB yw

$$y = y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1),$$

neu $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + y_1x_2 - x_1y_2 = 0$ yn y ffurf cyffredinol. Felly'r amod ar gyfer A, B a P i fod yn unllin yw

$$(y_2 - y_1)\bar{x} - (x_2 - x_1)\bar{y} + y_1x_2 - x_1y_2 = 0.$$

Diffiniad 1.7. Gall arwynebedd y triongl gyda fertigau A, B a P cael ei enrhifo o'r determinant canlynol²:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - \bar{y}) - y_1(x_2 - \bar{x}) + x_2\bar{y} - y_2\bar{x}].$$

²byddwn yn egluro hwn yn hwyrach yn y modiwl trwy ddefnyddio fectorau

Os yw $\mathcal{A} = 0$, yna mae $x_1(y_2 - \bar{y}) - y_1(x_2 - \bar{x}) + x_2\bar{y} - y_2\bar{x} = 0$ sydd, ar ôl ad-drefnu, yr un peth ag yr uchod.

Felly mae'r determinant yn cynnig ffordd hawdd o ddarganfod hafaliad llinell: rhwch x y 1 yn y rhes gyntaf ac 1 i gyd yn y drydedd colofn a cwblhewch y determinant trwy roi cyfesurynnau dau bwynt sydd ar y llinell.

Enghraifft 1.12. O wybod y pwyntiau $A:(3,-1)$ a $B:(-2,3)$, hafaliad y llinell AB yw

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1-3)x - (3+2)y + (9-2) = -4x - 5y + 7.$$

O wybod A, B a $C:(4,7)$, arwynebedd y triongl ABC yw

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |3(3-7) + (-2-4) + (-14-12)| = \frac{1}{2} |-12-6-26| = 22$$

1.1.7 Cromliniau

Yn gyffredinol, gall $F(x, y)$ fod yn affinol, ac felly mae $F(x, y) = 0$ yn disgrifio cromlin.

Enghraifft 1.13.

(i) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. Y cromlin sy'n cael ei ddisgrifio gan $F(x, y) = 0$ yw'r cylch gyda'i ganol ar y tardd a radiws 2.

(ii) $F(x, y) = x^2 - y - 1$. Mae $F(x, y) = 0$ yn disgrifio parabola.

(iii) $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Mae'r cromlin sy'n cael ei ddisgrifio gan $F(x, y) = 0$ yn wag, h.y. does dim pwyntiau yn y plân sy'n bodloni $x^2 + y^2 = -1$.

(iv) $G(x, y) = x^2 + y^2$. Mae $G(x, y) = 0$ yn cynnwys un pwynt yn unig, y tardd.

(v) $G(x, y) = x^2 - 5xy + 6y^2$. Gallwn ffactorio hwn i gael $G(x, y) = (x - 2y)(x - 3y)$; felly mae $G(x, y) = 0$ yn cynnwys yr holl bwyntiau ar y llinellau $y = x/2$ ac $y = x/3$.

