

3 Geometreg (gwirebol) Euclidaidd - ôl-nodyn hanesyddol

Mae'n bosib mai'r camp fwyaf geometreg hynafol, hydnoed mathemateg, yw'r llyfr "Elements" gan Euclid. Gan dybio rhai pethau lle gall pawb gytuno eu bod yn wir, hynny yw y gwirebau, gellir profi nifer o ganlyniadau.

Yn gyntaf, diffinnir nifer o wrthrychau geometrig, gan gynnwys:

D1: Mae pwynt yn wrthrych sydd heb rannau na maint.

D2: Mae gan linell hyd ond dim trwch.

D3: Eithafoedd llinell yw pwyntiau.

D4: Pan mae llinell syth yn gorwedd ar linell syth arall fel bod yr onglau cyfagos yn hafal i'w gilydd, gelwir pob ongl yn ongl sgwâr.

D5: Mae ongl lem/aflem yn ongl sy'n llai/mwy na ongl sgwâr.

D6: Triongl hafalochrog yw'r ffigur tair ochrog hwnnw sydd ag ochrau o'r un hyd.

D7: Triongl isogeles yw'r ffigur tair ochrog sydd â dwy ochr o'r un hyd.

D8: Rhombws yw'r ffigur pedrochrog sydd ag ochrau o'r un hyd ond lle nad yw'r onglau yn rhai sgwâr.

D9: Cylch yw'r ffigur mewn plân sydd wedi'i amgau gan un llinell, a'i gelwir yn gylchyn, fel bod pob llinell syth a dynnir o'r canolbwynt at y llinell hon yn hafal i'w gilydd

Mae'r *gwirebau* yn cynnwys:

G1: Mae pethau sy'n hafal i'r un peth yn hafal i'w gilydd.

G2: Os yw pethau hafal yn cael eu hadio at bethau eraill sy'n hafal, mae'r cyfansymiau'n hafal.

G3: Mae'r swm yn fwy na'r rhan.

Yna rhoddir y cynosodiadau gan:

C1: Ar gyfer dau bwynt gwahanol P a Q, mae llinell (syth) unigry sy'n cynnwys y ddau bwynt. Rydym yn dynodi'r llinell fel PQ neu QP.

C2: Gallwn ymestyn unrhyw segment llinell meidraidd yn ddiderfyn i unrhyw un o'r ddau gyfeiriad.

C3: Ar gyfer pwynt P ac hyd r , gellir llunio cylch gyda chanol yn P a radiws r .

C4: Mae pob ongl sgwâr yn hafal i'w gilydd.

Yr unig gynosodiad dadleuol yw'r pumed, sef y "cynosodiad paralel":

C5: Os yw llinell yn cwrdd â dwy linell syth fel bod yr onglau mewnol ar un ochr gyda'u gilydd yn llai na dwy ongl sgwâr, bydd y llinellau syth, o'u hymestyn heb derfyn, yn cyfarfod ar yr ochr lle mae'r onglau'n llai na dwy ongl sgwâr.

Mae'n ymddangos y gellir profi'r cynosodiad hwn gan ddefnyddio'r gwirebau, diffiniadau a'r cynosodiadau eraill, ond nid oes prawf ar gael.

Gadewch i ni ysgrifennu'r cynosodiad uchod mewn ffordd wahanol: o wybod pwynt P a llinell l sydd ddim yn cynnwys P, mae llinell unigryw l_p yn bodoli sy'n mynd trwy P ac sy'n baralel i l . Mae'r pum cynosodiad uchod yn rhoi seiliau ar gyfer *geometreg Euclidaidd*. Heb y pumed cynosodiad, mae gennym fersiynau gwahanol o geometreg *an-Euclidaidd*, er enghraifft:

- geometreg eliptig: nid oes llinellau paralel i l sy'n mynd trwy P (e.e. ar arwyneb sffêr);

- geometreg hyperbolig: mae nifer anfeidraidd o linellau paralel i l sy'n mynd trwy P.

O fewn ffurfioldeb geometreg Euclidaidd, gallwn brofi **Gosodiad 1** Euclid: er mwyn disgrifio (h.y. llunio) triongl hafalochrog ar segment llinell syth meidraidd sydd wedi'i rhoi.

Proof. Gadewch i AB fod yn llinell syth benodol; ac rydym angen creu triongl hafalochrog gydag AB fel un o'i ochrau.

Cam 1: disgrifiwch gylch BCD sydd gyda chanol A, a radiws AB (gallwn wneud hyn gan ddefnyddio **C3**).

Cam 2: disgrifiwch gylch ACE sydd gyda chanol B, a radiws AB (mae **C3** yn caniatáu hyn).

Cam 3: o'r pwynt C lle mae'r ddau gylch yn croestorri, lluniwch linellau syth AC ac AB (rydym yn gwybod fod y ddau yn unigryw o **C1**).

Rydym nawr angen dangos fod y triongl ABC yn hafalochrog:

- gan mai'r pwynt A yw canol y cylch BCD, rydym yn gwybod fod $AC=AB$ (o **D9**);
- gan mai'r pwynt B yw canol y cylch ACE, rydym yn gwybod fod $BC=AB$.

Felly mae CA a CB ill dau'n hafal i AB. Felly mae gwireb **G1** yn dweud eu bod yn hafal, $CA = CB$. Felly $CA=CB=AB$ ac mae'r triongl yn hafalochrog. $\square$