

1.2 Cylchoedd

1.2.1 Hafaliad cyffredinol cylch

Ystyriwch y mynegiant $S(x, y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, lle mae $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cwblhawn y sgwâr (dwywaith) i gael: $S(x, y) = (x + a)^2 + (y + b)^2 + c - a^2 - b^2 = 0$. Felly, mae $S(x, y) = 0$ yn gylch, canol $(-a, -b)$ a radiws $r^2 = a^2 + b^2 - c$.

Enghraifft 1.14.

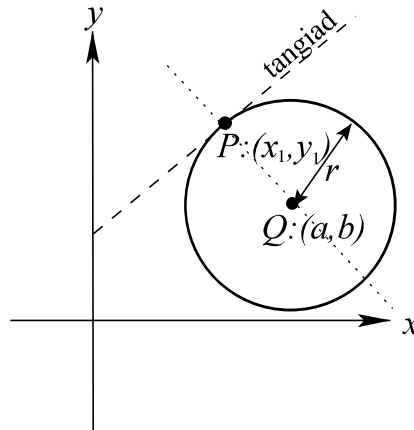
(i) Os yw $S(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21$, yna mae $S(x, y) = 0$ yn disgrifio cylch gyda chanol $(3, -4)$ a radiws $r = \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$.

(ii) Os yw $S(x, y) = x^2 + y^2 + 5x - 1$, yna mae $S(x, y) = 0$ yn disgrifio cylch gyda chanol $(-\frac{5}{2}, 0)$ a radiws $r = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$.

(iii) Os yw $S(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 10x - 12y - 2$, yna ysgrifennwn $S(x, y) = 5(x^2 + y^2 + 2x - \frac{12}{5}y - \frac{2}{5})$ i ddangos fod $S(x, y) = 0$ yn disgrifio cylch gyda chanol $(-1, \frac{6}{5})$ a radiws $r = \sqrt{1^2 + (\frac{6}{5})^2 + \frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{71}$.

(iv) Os yw $S(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 15$, yna mae'n ymddangos fod $S(x, y) = 0$ yn gylch gyda chanol $(-2, -3)$ a radiws $r = \sqrt{4 + 9 - 15}$, ond dyw hwn ddim yn rif real, felly dyw hwn ddim yn disgrifio cylch.

1.2.2 Tangiad i gylch



Ystyriwch y cylch, canol $Q: (-a, -b)$, radiws $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, $S : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Os yw'r pwynt $P : (x_1, y_1)$ ar y cylch, mae $S(x_1, y_1) = 0$. Mae tangiad i'r cylch ar P yn berpendicwlar i'r llinell PQ ac mae'n mynd drwy P. Goledd PQ yw $\frac{(y_1 + b)}{(x_1 + a)}$ felly goled y tangiad

yw $-\frac{(x_1 + a)}{(y_1 + b)}$ ac felly ei hafaliad yw $y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + a}{y_1 + b}\right)(x - x_1)$. Rydym yn ehangu ac yn cael $yy_1 + by - y_1^2 - by_1 + xx_1 + ax - x_1^2 - ax_1 = 0$. Nawr, gan fod P yn bodloni $S(x_1, y_1) = 0$, gallwn amnewid $-(x_1^2 + y_1^2) = c + 2ax_1 + 2by_1$ i gael $yy_1 + xx_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$. I wirio hyn, nodwch fod hwn yn llinol yn x ac y ill dau, felly mae'n wirioneddol yn llinell. Mae ad-drefnu yn dangos bod:

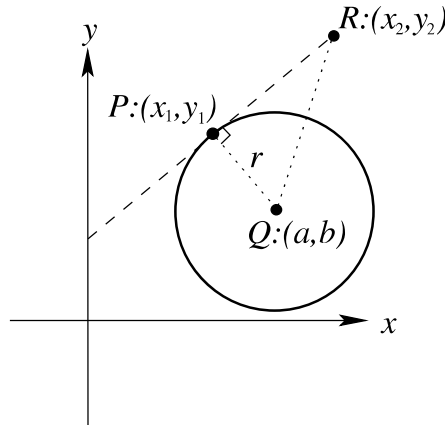
Diffiniad 1.8. Yn y ffurf safonol hafaliad y tangiad i'r cylch $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ar y pwynt (x_1, y_1) yw

$$(x_1 + a)x + (y_1 + b)y + ax_1 + by_1 + c = 0.$$

Enghraifft 1.15. Darganfyddwch y tangiad i'r cylch $S : x^2 + y^2 - 6x - 3y - 5 = 0$ yn y pwynt $(1, -2)$.

1.2.3 Pellter tangiadol

Diffiniad 1.9. Gelwir pellter y pwynt $R:(x_2, y_2)$ o'r pwynt P lle mae'r tangiad trwy R yn cyffwrdd â'r cylch $S : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ gyda chanol Q y pellter tangiadol o R i S , a rhoddir gan $\sqrt{S(x_2, y_2)}$.



I weld hyn, nodwch fod

$$\begin{aligned} (RP)^2 &= (RQ)^2 - (PQ)^2 \\ &= (x_2 + a)^2 + (y_2 + b)^2 - (a^2 + b^2 - c) \\ &= x_2^2 + 2ax_2 + y_2^2 + 2by_2 + c \\ &= S(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Dyw hyn ddim yn wir os yw R tu mewn i'r cylch, er mae'n wir bod $S(x_2, y_2) < 0$ yn yr achos yma.

Felly, o wybod cylch $S(x, y) = 0$ a phwynt $R:(x_2, y_2)$ mae:

$S(x_2, y_2) < 0$ os yw R tu mewn i'r cylch;

$S(x_2, y_2) = 0$ os yw R ar y cylch (cylchyn);

$S(x_2, y_2) > 0$ os yw R tu allan i'r cylch, gyda phellter tangiadol $\sqrt{S(x_2, y_2)}$.

Enghraifft 1.16. O wybod y cylch $S : x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2 = 0$, penderfynwch os yw'r pwynt $(2, 1)$ tu mewn neu tu allan i'r cylch a, os yw'r pwynt tu allan, pa mor bell yw e o'r pwynt lle mae'r tangiad trwyddo ef yn cwrdd â'r cylch.

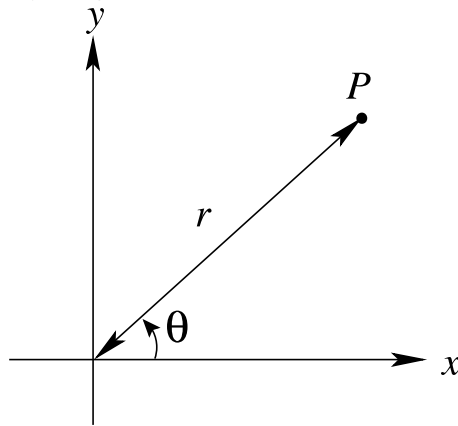
Enghraifft 1.17. Ar gyfer pa werthoedd c yw'r pwynt $(c, -1)$ tu allan i'r cylch $S : x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2 = 0$?

1.2.4 Cyfesurynnau pegynlinol

Yn lle defnyddio cyfesurynnau (x, y) Cartesaidd, gallwn ddisgrifio safle pwynt yn nhermau cyfesurynnau pegynlinol (r, θ) , lle r yw'r pellter o'r tardd a θ yw'r pellter onglog (gwrthglocwedd) o'r echelin- x . Y perthynas rhwng y ddau system gyfesurynnol yw

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Fel arfer, cyfyngir yr ongl θ i'r cyfwng $-\pi < \theta \leq \pi$ neu $0 \leq \theta < 2\pi$.



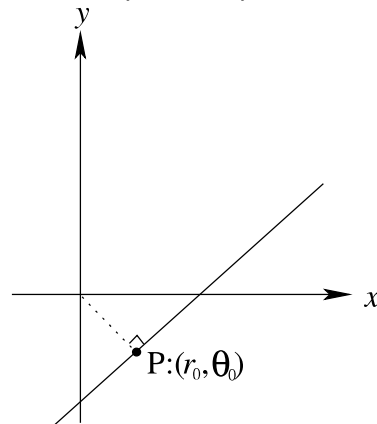
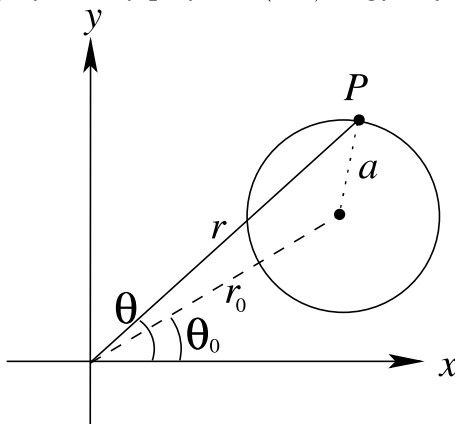
Yna gellir ysgrifennu'r cylch $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ fel $r = a$; a'r llinell $y = x \tan \theta_0$ fel $\theta = \theta_0$; a'r llinell $x = 2$ fel $r \cos \theta = 2$.

Enghraifft 1.18. Darganfyddwch hafaliad pegynlinol y cylch $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Sylw: Yr hafaliad pegynlinol ar gyfer cylch, radiws a , canol (r_0, θ_0) yw

$$r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0) = a^2 - r_0^2.$$

I weld hyn, ystyriwch y pwynt $P:(r, \theta)$ ar gylchyn y cylch a defnyddiwch y ddeddf cosin.



Sylw: Yr hafaliad pegynlinol ar gyfer llinell yw

$$r \cos(\theta - \theta_0) = r_0,$$

lle mae'r pwynt $P:(r_0, \theta_0)$ ar waelod y perpendicwlar o'r llinell trwy'r tardd.

Enghraifft 1.19. *Darganfyddwch hafaliad pegynlinol ar gyfer y llinell $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$.*