

2 Fectorau

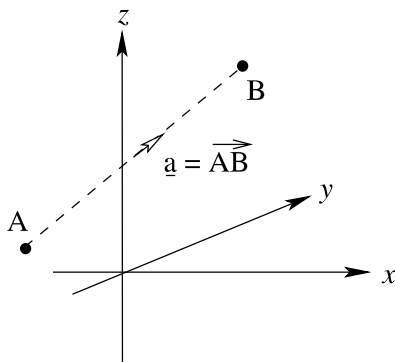
Mae mesurau sy'n cael eu diffinio gan rif sengl, fel tymheredd a buanedd, yn cael eu galw'n *sgalarau*. Dyw hyn ddim yn wir am fesurau fel grym a chyflymder; yn ychwangeol i faint mae ganddynt *gyfeiriad*. Fectorau yw rhain. Gan eu bod yn disgrifio pethau mor sylfaenol, mae'n werth deall sut i ddehongli a'u trin hwy.

2.1 Cysyniadau sylfaenol

Diffiniad 2.1.

Segment llinell gyfeiriedig yw fector. Mae gan y llinell segment gyfeiriedig $\overrightarrow{AB}$ bwynt cychwynnol A a diweddswynt B .

*Yn aml, ysgrifennir fector fel llytheren fach wedi'i thanlinellu (neu'n **drwm**), e.e. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ neu $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.*



Dynodwn hyd y fector gan $|\overrightarrow{AB}| = |\underline{a}|$. Os fod gan $\underline{a}$ cydrannau (a_1, a_2, a_3) yn y cyfeiriadau x, y, z , yn ôl eu trefn, yna'i hyd (neu'i fodwlws, neu'i faint) yw $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Gelwir fector sydd â'i fodwlws yn hafal i un yn fector uned, sydd weithiau'n cael ei ysgrifennu gyda het: $\hat{\underline{a}}$. Trwy ddiffiniad, ar gyfer unrhyw fector $\hat{\underline{a}} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$.

Ar echelinau Cartesaidd $Oxyz$, gallwn gydrannu unrhyw fector i mewn i'w gydrannau yn y tri cyfeiriad gyfesurynnol. Ysgrifennwn $\underline{i}, \underline{j}$, a $\underline{k}$ am fectorau uned ar hyd Ox, Oy , ac Oz , yn ôl eu trefn; e.e. mae $\underline{i}$ yn mynd o $(0,0,0)$ i $(1,0,0)$.

Yna, os yw A yn unrhyw bwynt gyda cyfesurynnau (a_1, a_2, a_3) , ei fector safle yw $\underline{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$.

Diffiniad 2.2. *Mae dau fector yn hafal os mae ganddynt yr un hyd a chyfeiriad. Ar ffurf cydrannol, mae hwn yn meddwl bod y fectorau $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ a $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ yn hafal os $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ ac $a_3 = b_3$.*

Os yw $\underline{a} = \underline{b}$ yna mae $\underline{b} - \underline{a} = \underline{0}$, y fector sero.

Enghraifft 2.1. *Os yw $A = (1, 1) = \underline{i} + \underline{j}$ a $B = (2, 3) = 2\underline{i} + 3\underline{j}$, yna mae $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = (1, 2) = \underline{i} + 2\underline{j}$, h.y. $a_1 = 1$ ac $a_2 = 2$.*

Enghraifft 2.2. *Darganfyddwch fector uned yn y cyfeiriad $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j}$.*

Sylw: Sut mae $\overrightarrow{BA}$ yn perthyn i $\overrightarrow{AB}$? Dylai'r ddau fector yma fod yr un hyd ond bod eu cyfeiriadau yn dirgroes. Os yw $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, yna mae $\overrightarrow{BA} = -\underline{a}$, neu $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

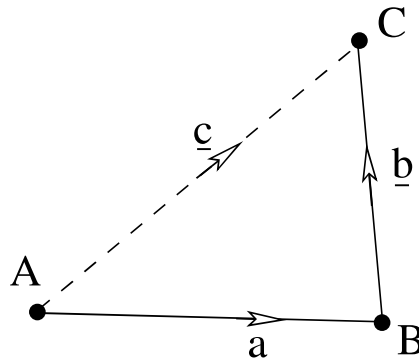
Diffiniad 2.3. Mae dau fector yn baralel os yw un yn luosrif sgalar o'r llall; h.y. mae $\underline{a}$ yn baralel i $\underline{b}$ os yw $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ ar gyfer rhyw $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Os yw $\lambda > 0$, mae'r fectorau yn baralel ac yn yr un cyfeiriad.

Os yw $\lambda < 0$, mae'r fectorau yn baralel mewn cyfeiriadau dirgroes (gwrthbaralel).

2.2 Adio fectorau

Os $\underline{a}$ yw'r fector o A i B ($\overrightarrow{AB}$) a $\underline{b}$ yw'r fector o B i C ($\overrightarrow{BC}$), beth yw $\overrightarrow{AC}$?



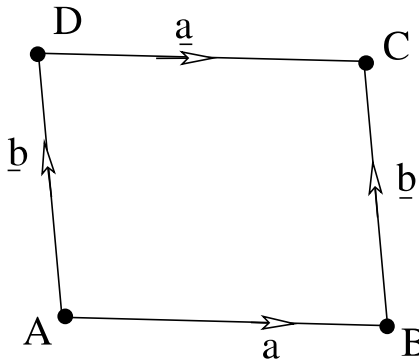
Er enghraifft, os yw $\overrightarrow{AB} = \underline{i}$ a $\overrightarrow{BC} = \underline{j}$, yna mae $\overrightarrow{AC} = \underline{i} + \underline{j}$.

Y canlyniad yw ein bod yn gallu adio fectorau yn ôl “deddf triongl” adio:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}.$$

A yw trefn yr adiad yn gwneud unrhyw wahaniaeth (yw adio fectorau yn gymudol)?

Dangosiad 1: Ystyriwch baralelogram $ABCD$, gyda $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ a $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$. Mae $\overrightarrow{DC}$ yn baralel i $\overrightarrow{AB}$, ac mae ganddo'r un hyd, felly mae $\overrightarrow{DC} = \underline{a}$. Yn yr un modd, mae $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$. Yn cychwyn o A mae yna ddau ffordd i fynd i C: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$ ac $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{b} + \underline{a}$ (“deddf paralelogram” adio). Felly mae $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ a dyw'r drefn ddim yn bwysig.



Dangosiad 2: Dangoswn drwy ddefnyddio cydrannau, gan ein bod yn gwybod bod y drefn yr ydym yn adio sgalarau ddim yn bwysig. Ysgrifennwch $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ a $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$. Yna mae

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1)\underline{i} + (a_2 + b_2)\underline{j} + (a_3 + b_3)\underline{k} = (b_1 + a_1)\underline{i} + (b_2 + a_2)\underline{j} + (b_3 + a_3)\underline{k} = \underline{b} + \underline{a}.$$

Mae defnyddio'r ffurf cydrannol yn ein galluogi i brofi nifer o ganlyniadau eraill am fectorau. Er enghraifft, maent yn gysylltiadol:

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}).$$

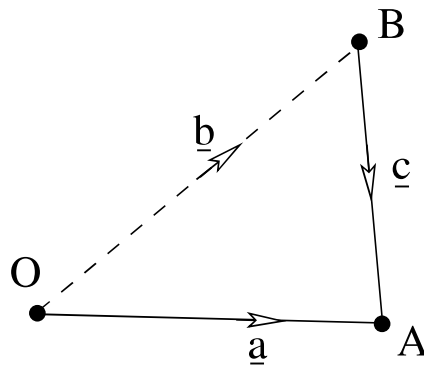
Felly dyw'r cromfachau ddim o bwys, a gallwn adio'r fectorau mewn unrhyw drefn. Ymhellach, maent yn ufuddhau'r deddf *dosbarthol*:

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$$

am luosi â sgalar λ .

Mae tynnu yn gweithio yn yr un modd ag adiad, gan fod $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$. Er enghraifft, yn y triongl OAB gyda $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ a $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ mae

$$\underline{c} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \underline{a} - \underline{b}.$$



Enghraifft 2.3. O wybod y fectorau $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$, $\underline{b} = 2\underline{i} + \underline{k}$, a $\underline{c} = -\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}$ yna mae

- (a) $\underline{a} + \underline{b} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$;
- (b) $2\underline{a} - \underline{b} = 4\underline{j} + 5\underline{k}$;
- (c) $\underline{a} - \underline{b} + \underline{c} = -2\underline{i} + 5\underline{j} + 7\underline{k}$;
- (d) y fector uned $\hat{b} = \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{k}$.

Enghraifft 2.4. o wybod y fectorau $\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{b} = \underline{i} + \underline{k}$, a $\underline{c} = 2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$, yna mae

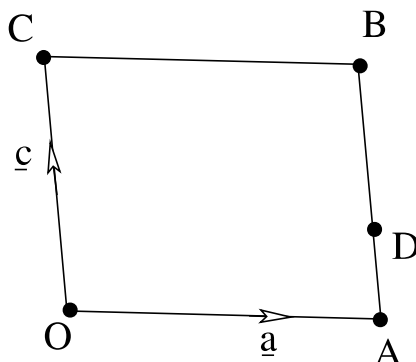
- (a) $\underline{a} + \underline{b} - 3\underline{c} = -4\underline{i} + 4\underline{j} - 10\underline{k}$;
- (b) $|\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}| = |4\underline{i} + 2\underline{k}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$;
- (c) $\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{i} - \underline{k}$;
- (d) $|2\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c}| = |7\underline{i} + 3\underline{k}| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$;
- (e) fectorau uned yng nhyfeiriad $\underline{a}$, $\underline{b}$ a $\underline{c}$ yw $\frac{1}{\sqrt{6}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{k}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{k}$, a $\frac{2}{\sqrt{14}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{14}}\underline{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\underline{k}$ yn ôl eu trefn.

Enghraifft 2.5. Mynegwch y fectorau isod yn nhermau y fectorau uned $\underline{i}$ a $\underline{j}$, sy'n pwyntio i'r dwyrain ac i'r gogledd, yn ôl eu trefn.

- (a) $10\sqrt{2}$ uned yn y cyfeiriad gogledd ddwyrain;
- (b) 5 uned yn y cyfeiriad N 60° W;
- (c) $8\sqrt{2}$ uned yn y cyfeiriad N 135° E.

Nawr ystyriwch y fector (sement llinell) $\overrightarrow{AB}$. Dynodwch ei ganolbwynt gan C . Yna mae $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Enghraifft 2.6. Yn y paralelogram $OABC$, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ and $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$. Mae'r pwynt D ar $\overrightarrow{AB}$ ac mae'n ei rhannu yn y cymhareb $AD : DB = 1 : 2$.

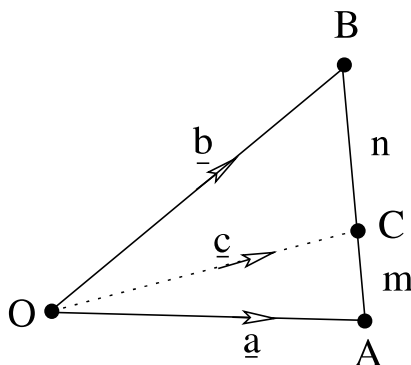


Mynegwch yr isod yn nhermau $\underline{a}$ a $\underline{c}$:

(a) $\overrightarrow{CB}$; (b) $\overrightarrow{BC}$; (c) $\overrightarrow{AB}$; (d) $\overrightarrow{AD}$; (e) $\overrightarrow{OD}$; (f) $\overrightarrow{DC}$.

Gosodiad 1. Boed i $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ac $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$. Os yw C yn bwynt sy'n rhannu AB i mewn i ddau segment sy'n y cymhareb $m : n$, yna rhoddir y fector $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ gan

$$\underline{c} = \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}.$$



Proof. Gan fod $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, mae

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \underline{a} + \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a}) = \frac{(m+n-m)\underline{a} + m\underline{b}}{m+n} = \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}.$$

□

Enghraifft 2.7. Yn y paralelogram $OABC$, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ a $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$. Mae D yn bwynt ar AB fel bod $AD : DB = 2 : 1$. Mae $\overrightarrow{OD}$ wedi ei estyn yn cwrdd â $\overrightarrow{CB}$ wedi ei estyn yn E . Ymhellach, mae $\overrightarrow{DE} = h\overrightarrow{OD}$, $h \in \mathbb{R}$, a $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{CB}$, $k \in \mathbb{R}$. Darganfyddwch (a) $\overrightarrow{BE}$ yn nhermau $\underline{a}$ a k ; (b) $\overrightarrow{DE}$ yn nhermau h , $\underline{a}$ a $\underline{c}$; (c) gwerthoedd h a k .

