Quantum Feedback Networks

John Gough
IMAPS, Aberystwyth University

- ***The Series Product & Its Application to Quantum Feedforward and Feedback Networks***

  (J.G, M.R. James)

IEEE Transactions on Automatic Control Vo1 54, No. 11, 2530-45 (2009)

- ***Quantum Feedback Networks: Hamiltonian Formalism***

  (J.G., M.R. James)

Commun. Math. Phys. 1109-1132, Volume 287, Number 3 / May, 2009

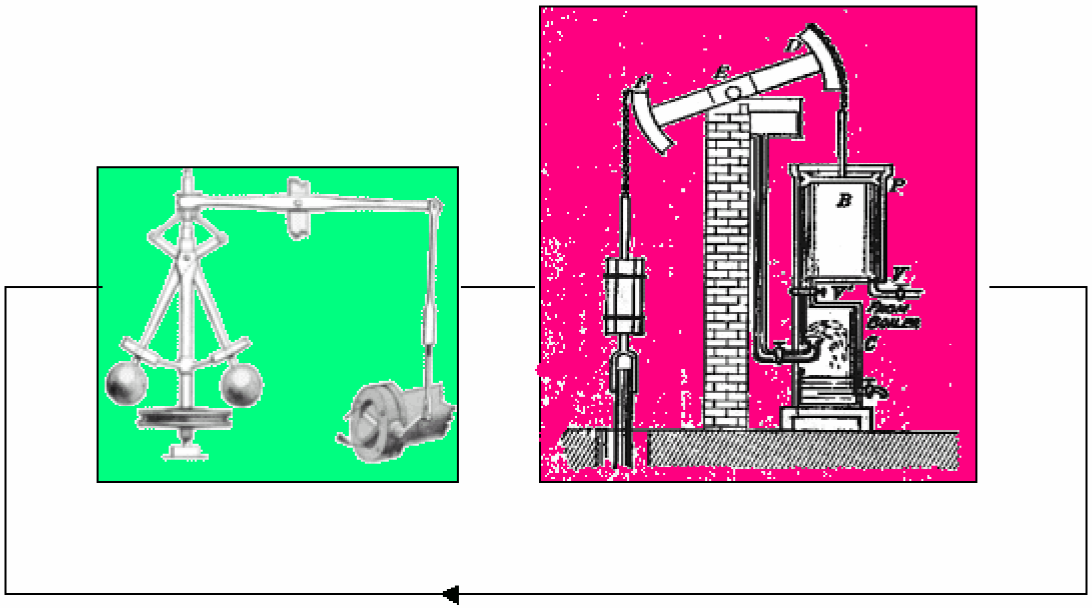
- ***Linear Quantum Feedback Networks***

  (J.G., R. Gohm, M. Yanagisawa)

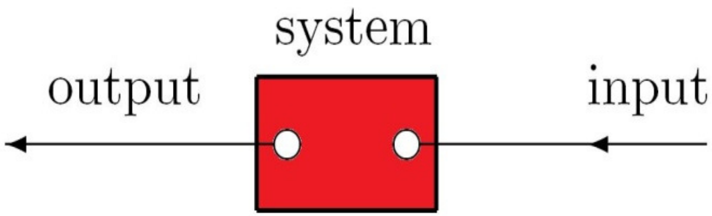
Phys. Rev. A 78, 062104 (2008)

Classical Feedback Control

Watt Governer & Steam Engine



Quantum White Noise Inputs



$$\mathbf{b}^{\mathrm{in}}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\left[b_i(t), b_j^{\dagger}(s) \right] = \delta_{ij}\, \delta(t-s).$$

It is convenient to introduce integrated fields

$$\begin{aligned} B_i(t) &\equiv \int_0^t b_i(s)\, ds,\ B_i^{\dagger}(t) \equiv \int_0^t b_i^{\dagger}(s)\, ds, \\ \Lambda_{ij}(t) &\equiv \int_0^t b_i^{\dagger}(s)\, b_j(s)\, ds. \end{aligned}$$

Dynamical Evolution

We introduce the processes

$$\boxed{\begin{aligned} j_t(\mathsf{X}) &\triangleq V^\dagger(t)\left[\mathsf{X}\otimes 1\right]V(t)\,, \\ B_i^{out}(t) &\triangleq V^\dagger(t)\left[1\otimes B_i(t)\right]V(t)\,. \end{aligned}}$$

Emission/Absorption Coupling

$$dV(t) = \left(\mathsf{L}_i \otimes dB_i^\dagger(t) - \mathsf{L}_i^\dagger \otimes dB_i(t) - \left(\frac{1}{2}\mathsf{L}_i^\dagger \mathsf{L}_i + i\mathsf{H}\right) \otimes dt \right) V(t)$$

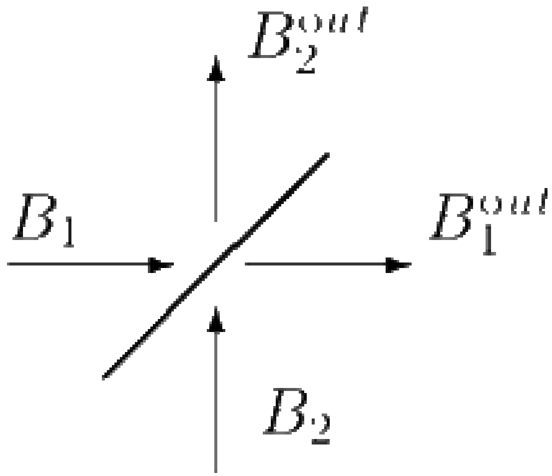
Coupling Operators $\quad \mathsf{L} = \begin{pmatrix} \mathsf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{L}_n \end{pmatrix}.$

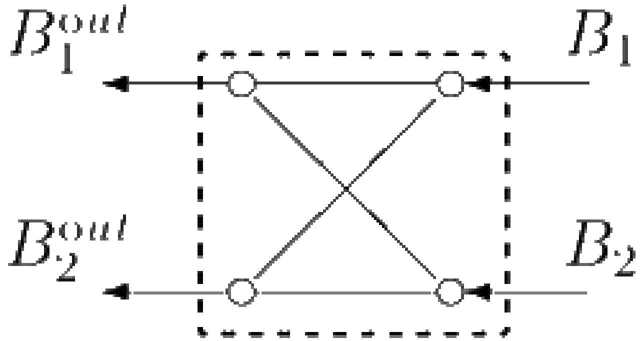
$$dj_t(\mathsf{X}) = j_t(\mathcal{L}(\mathsf{X}))\,dt + j_t([\mathsf{X}, \mathsf{L}_i])\,dB_i^\dagger + j_t\left([\mathsf{L}_i^\dagger, \mathsf{X}]\right) dB_i$$

$$dB_i^{out}(t) = dB_i(t) + j_t(\mathsf{L}_i)\,dt.$$

$$\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \tfrac{1}{2}\mathsf{L}_i^\dagger [\mathsf{X}, \mathsf{L}_i] + \tfrac{1}{2}\left[\mathsf{L}_i^\dagger, \mathsf{X}\right] \mathsf{L}_i - i[\mathsf{X}, \mathsf{H}].$$

Beam Splitters





$$\boxed{dB_i^{out}(t) = T_{ij}dB_j(t)}$$

$T = (T_{ij})$ unitary c number valued matrix.

Scattering

$$dV(t) = (\mathsf{S}_{ij} - \delta_{ij}) \otimes d\Lambda_{ij}(t)\, V(t),$$

Unitary operator-valued matrix

$$\mathsf{S} \triangleq \begin{pmatrix} \mathsf{S}_{11} & \cdots & \mathsf{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathsf{S}_{n1} & \cdots & \mathsf{S}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$dj_t(\mathsf{X}) = j_t\left(\mathsf{S}_{ki}^{\dagger}(\mathsf{X} - 1)\,\mathsf{S}_{kj}\right) d\Lambda_{ij}(t)\,,$$

$$dB_i^{out}(t) = j_t(\mathsf{S}_{ij})\, dB_j(t)\,.$$

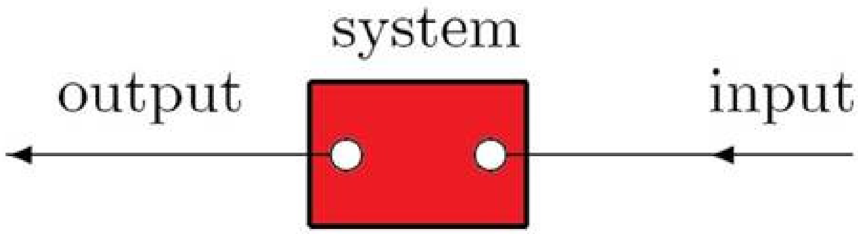
General Component

$$
\begin{aligned}
dV(t) &= [(\mathsf{S}_{ij} - \delta_{ij}) \otimes d\Lambda_{ij}(t) + \mathsf{L}_i \otimes dA_i^\dagger(t) \\
&\quad -\mathsf{L}_i^\dagger \mathsf{S}_{ij} \otimes dA_j(t) - (\frac{1}{2}\mathsf{L}_i^\dagger \mathsf{L}_i + i\mathsf{H}) \otimes dt)]V(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dj_t(\mathsf{X}) &= j_t(\mathcal{L}(\mathsf{X}))\,dt + j_t(\mathsf{S}_{ji}^\dagger[\mathsf{X}, \mathsf{L}_j])dB_i^\dagger + j_t\left([\mathsf{L}_i^\dagger, \mathsf{X}]\mathsf{S}_{ij}\right)dB_j \\
&\quad + j_t\left(\mathsf{S}_{ki}^\dagger(\mathsf{X} - 1)\mathsf{S}_{kj}\right)d\Lambda_{ij}(t). \\
dB_i^{\mathrm{out}}(t) &= j_t(\mathsf{S}_{ij})\,dB_j(t) + j_t(\mathsf{L}_i)\,dt.
\end{aligned}
$$

System Parameters

The triple $(\mathsf{S}, \mathsf{L}, \mathsf{H})$, which determines the model, is referred to as the set of system parameters.

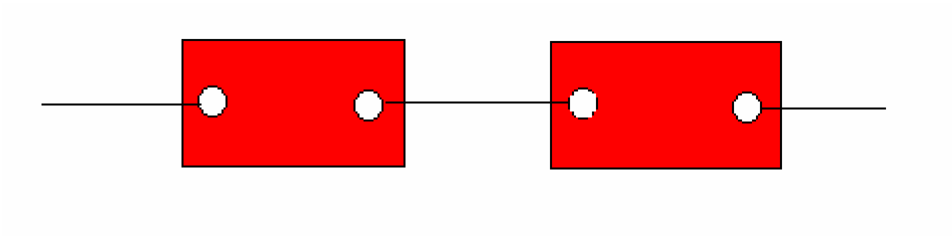


Model Matrix:

$$\mathrm{V} \triangleq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathsf{L}^\dagger\mathsf{L} - i\mathsf{H} & -\mathsf{L}^\dagger\mathsf{S} \\ \mathsf{L} & \mathsf{S} \end{pmatrix}$$

Non-Markovian Models

Cascaded Systems with Time-Delays

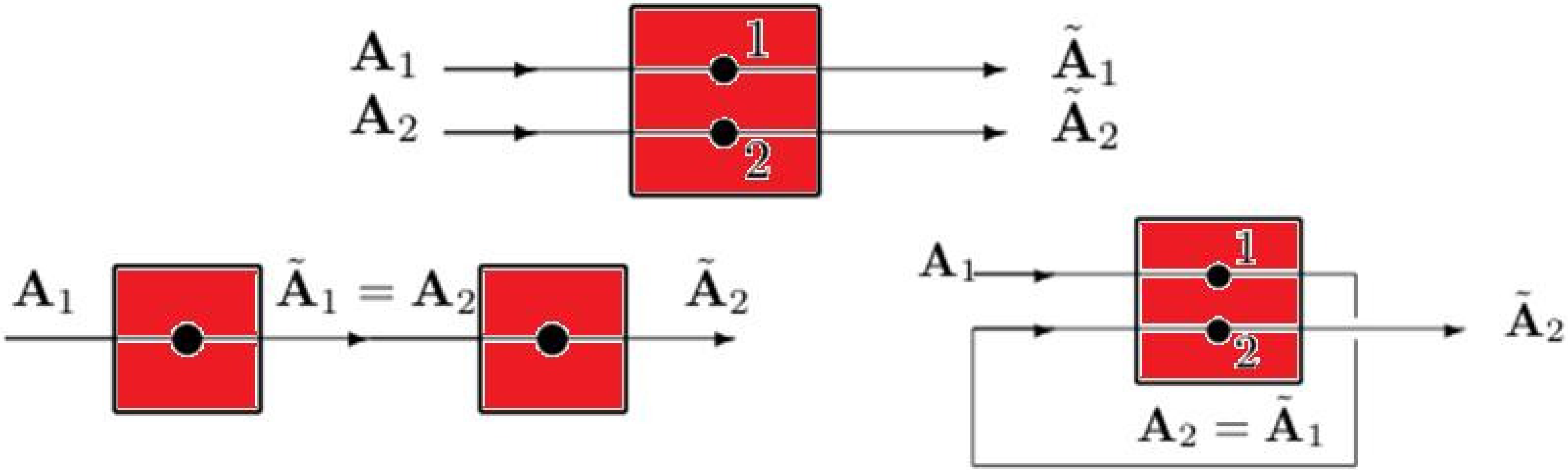


Feedthrough:

Feedforward / Direct Feedback

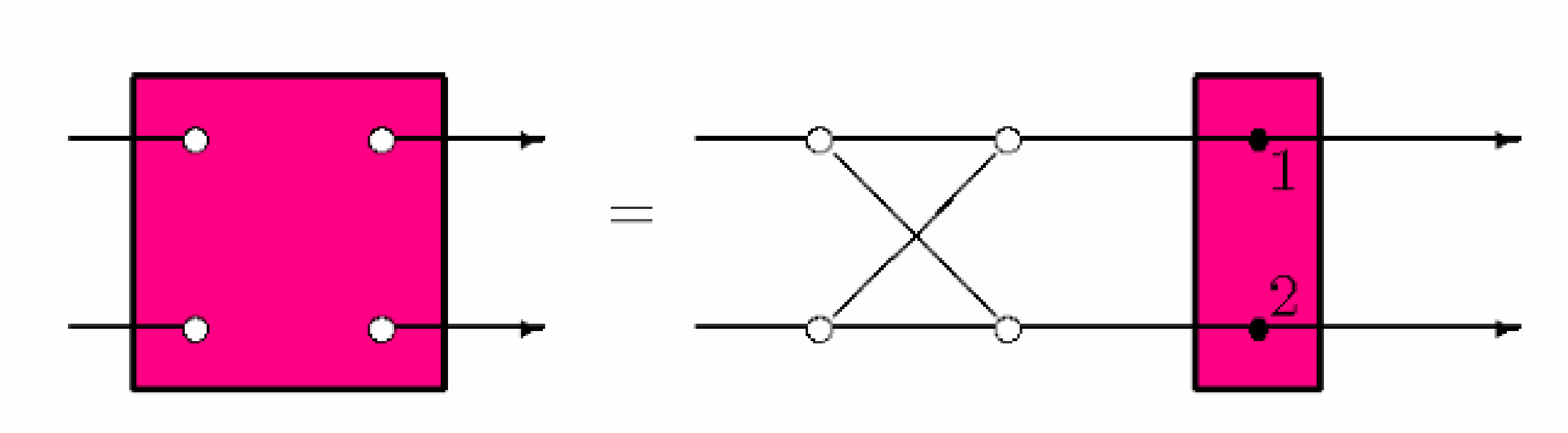
Systems in Series

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{series}} &= S_2 S_1 , \\ L_{\mathrm{series}} &= L_2 + S_2 L_1 , \\ H_{\mathrm{series}} &= H_1 + H_2 + Im\left\{ L_2^\dagger S_2 L_1 \right\} . \end{aligned}$$

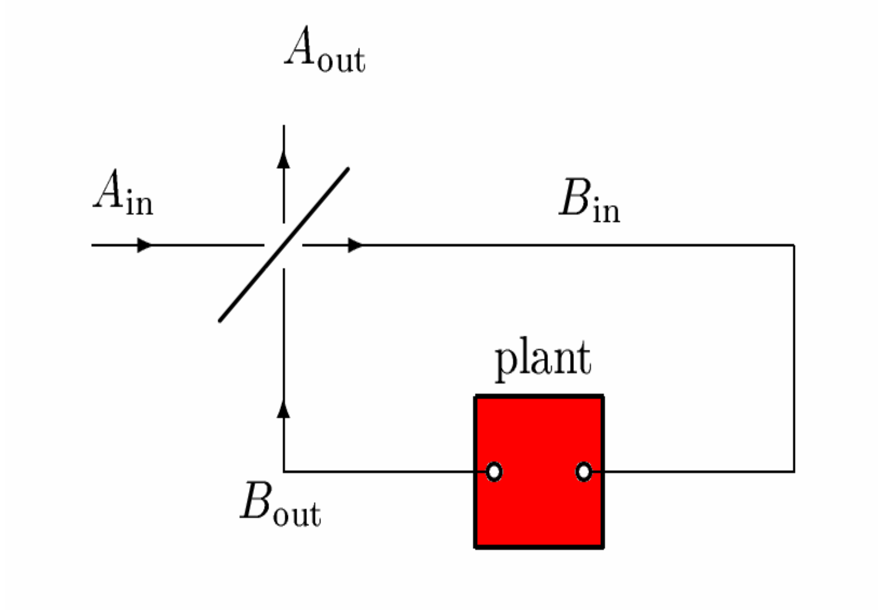


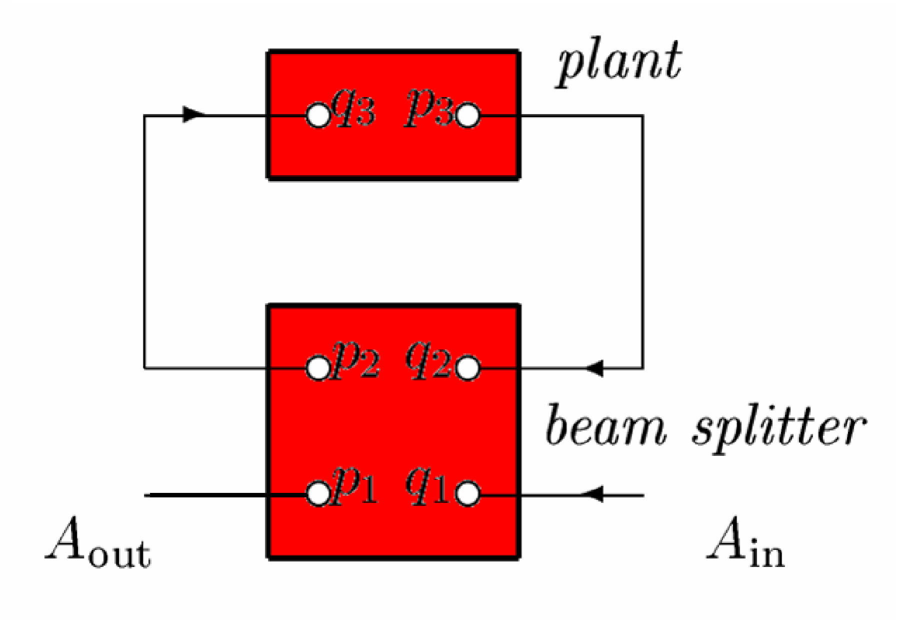
Decomposition of a General Component

Scattering component and an emission/absorption component in series



Feedback using Beam Splitters: Systems in-loop



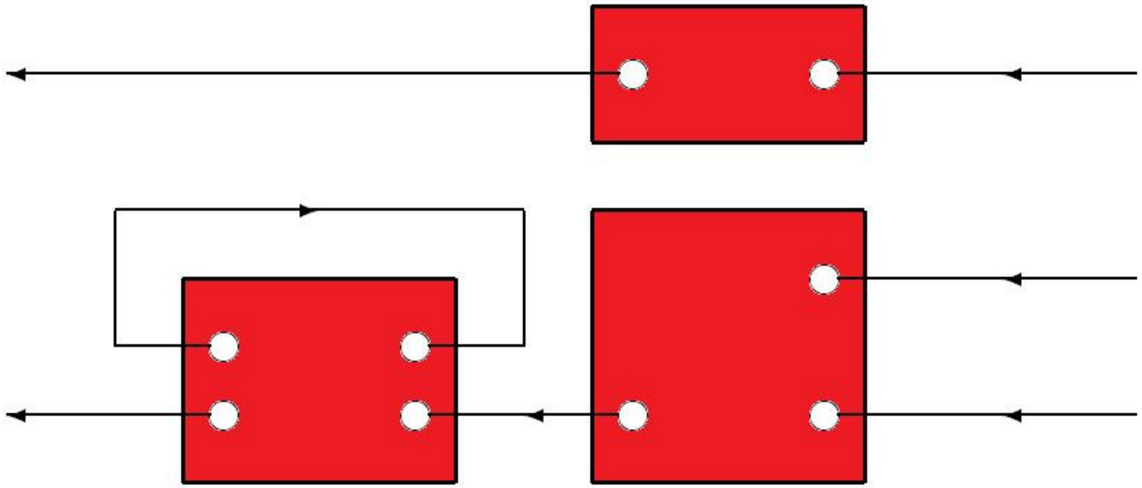


Effective Reduced Model

Let the parameters for the in-loop plant be $(\mathsf{S}_0, \mathsf{L}_0, \mathsf{H}_0)$.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}_{\rm red} &= T_{11} + T_{12}\left(\mathsf{S}_0^{-1} - T_{22}\right)^{-1} T_{21},\\
\mathsf{L}_{\rm red} &= T_{12}\left(1 - \mathsf{S}_0 T_{22}\right)^{-1} \mathsf{L}_0,\\
\mathsf{H}_{\rm red} &= \mathsf{H}_0 + Im \mathsf{L}_0^{\dagger}\left(1 - \mathsf{S}_0 T_{22}\right)^{-1} \mathsf{L}_0.
\end{aligned}
$$

Quantum Feedback Networks



$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathsf{L}^\dagger \mathsf{L} - iH & -\mathsf{L}^\dagger \mathsf{S} \\ \mathsf{L} & \mathsf{S} \end{pmatrix}$$

Theorem *Let* $e_0 = (q_0, p_0)$ *be an internal channel with time delay* $\tau_0 = T_{p_0} - T_{q_0} \geq 0$ *in a quantum network* $\mathcal{N}$ *for which* $1 - V_{p_0 q_0}$ *is invertible. In the limit* $\tau_0 \to 0^+$*, the network reduces to* $\mathcal{N}_{red}$ *in which the input and output ports are* $\mathcal{P}_{in} \backslash \{q_0\}$ *and* $\mathcal{P}_{out} \backslash \{p_0\}$ *and the edge* e_0 *eliminated. (In the case where* q_0 *and* p_0 *are initially in different components, then the components merge.) The reduced model matrix* $\mathbf{V}^{red}$ *has the components*

$$V^{red}_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} + V_{\alpha q_0} \left(1 - V_{p_0 q_0}\right)^{-1} V_{p_0 \beta},$$

for $\beta \in \{0\} \cup \mathcal{P}_{in} \backslash \{q_0\}$ *and* $\alpha \in \{0\} \cup \mathcal{P}_{out} \backslash \{p_0\}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{S}^{\mathrm{red}}_{pq} &= \mathsf{S}_{pq} + \mathsf{S}_{pq_0} \left(1 - \mathsf{S}_{p_0 q_0}\right)^{-1} \mathsf{S}_{p_0 q}, \\ \mathsf{L}^{\mathrm{red}}_{p} &= \mathsf{L}_{p} + \mathsf{S}_{pq_0} \left(1 - \mathsf{S}_{p_0 q_0}\right)^{-1} \mathsf{L}_{p_0}, \\ H^{\mathrm{red}} &= H + \sum_{q \in \mathcal{P}_{\mathrm{in}}} \mathrm{Im}\, \mathsf{L}^{\dagger}_{p} \mathsf{S}_{pq_0} \left(1 - \mathsf{S}_{p_0 q_0}\right)^{-1} \mathsf{L}_{p_0} \end{aligned}}$$

Eliminating Edges

$$\boxed{\mathcal{F}_e(\mathbf{V}, X)_{\alpha\beta} \triangleq \mathsf{V}_{\alpha\beta} + \mathsf{V}_{\alpha r} X (1 - \mathsf{V}_{sr} X)^{-1} \mathsf{V}_{s\beta},}$$

$$\mathcal{F}_{e_1} \circ \mathcal{F}_{e_2} = \mathcal{F}_{e_2} \circ \mathcal{F}_{e_1} = \mathcal{F}_{e_1+e_2}.$$

Complete Elimination

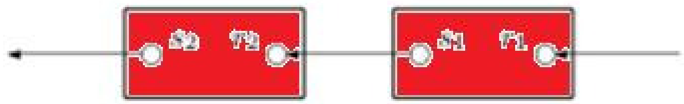
$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} \mathsf{S}_{\mathtt{ii}} & \mathsf{S}_{\mathtt{ie}} \\ \mathsf{S}_{\mathtt{ei}} & \mathsf{S}_{\mathtt{ee}} \end{pmatrix}. \quad \mathsf{L} = \begin{pmatrix} \mathsf{L}_{\mathtt{i}} \\ \mathsf{L}_{\mathtt{e}} \end{pmatrix} \quad \eta_{sr} = \begin{cases} 1, & \text{if } (s, r) \text{ is an internal channel,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{V}, \eta^{-1})_{\alpha\beta} \triangleq \mathsf{V}_{\alpha\beta} + \mathsf{V}_{\alpha\mathtt{i}} (\eta - \mathsf{V}_{\mathtt{ii}})^{-1} \mathsf{V}_{\mathtt{i}\beta}$$

Effective Parameters

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}^{\mathrm{red}} &= \mathsf{S}_{\mathtt{ee}} + \mathsf{S}_{\mathtt{ei}}\left(\eta - \mathsf{S}_{\mathtt{ii}}\right)^{-1}\mathsf{S}_{\mathtt{ie}}, \\
\mathsf{L}^{\mathrm{red}} &= \mathsf{L}_{\mathtt{e}} + \mathsf{S}_{\mathtt{ei}}\left(\eta - \mathsf{S}_{\mathtt{ii}}\right)^{-1}\mathsf{L}_{\mathtt{i}}, \\
\mathsf{H}^{\mathrm{red}} &= \mathsf{H} + \sum_{i=\mathtt{i},\mathtt{e}} Im \mathsf{L}_j^{\dagger}\mathsf{S}_{j\mathtt{i}}\left(\eta - \mathsf{S}_{\mathtt{ii}}\right)^{-1}\mathsf{L}_{\mathtt{i}}.
\end{aligned}$$

Example: Series Product



$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1,2}(\frac{1}{2}\mathsf{L}_j^\dagger \mathsf{L}_j + i\mathsf{H}_j) & -\mathsf{L}_1^\dagger \mathsf{S}_1 & -\mathsf{L}_2^\dagger \mathsf{S}_2 \\ \mathsf{L}_1 & \mathsf{S}_1 & 0 \\ \mathsf{L}_2 & 0 & \mathsf{S}_2 \end{pmatrix}$$

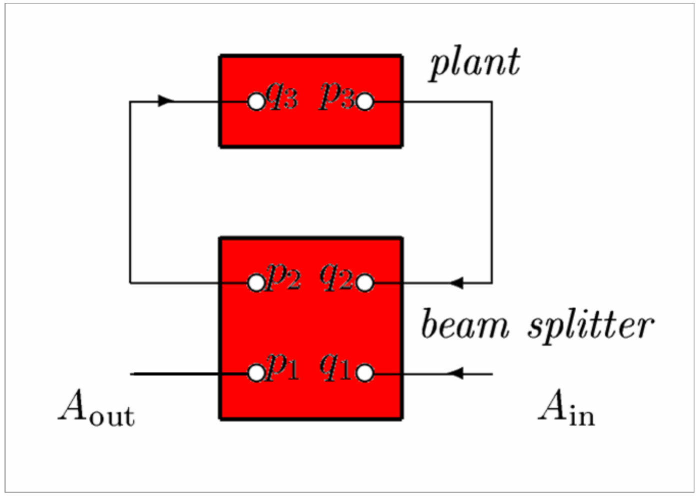
$$\mathbf{V}_{\text{series}} = \mathcal{F}_e \mathbf{V}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sum_{j=1,2}(\frac{1}{2}\mathsf{L}_j^\dagger \mathsf{L}_j + i\mathsf{H}_j) & -\mathsf{L}_1^\dagger \mathsf{S}_1 \\ \mathsf{L}_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathsf{L}_2^\dagger \mathsf{S}_2 \\ \mathsf{S}_2 \end{pmatrix} (1 - 0)^{-1} (\mathsf{L}_1, \mathsf{S}_1)$$

$$= \begin{pmatrix} -\sum_{j=1,2}(\frac{1}{2}\mathsf{L}_j^\dagger \mathsf{L}_j + i\mathsf{H}_j) - \mathsf{L}_2^\dagger \mathsf{S}_2 \mathsf{L}_1 & -\mathsf{L}_1^\dagger \mathsf{S}_1 - \mathsf{L}_2^\dagger \mathsf{S}_2 \mathsf{S}_1 \\ \mathsf{L}_2 + \mathsf{S}_2 \mathsf{L}_1 & \mathsf{S}_2 \mathsf{S}_1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{S}_{\text{series}} &= \mathsf{S}_2 \mathsf{S}_1, \\ \mathsf{L}_{\text{series}} &= \mathsf{L}_2 + \mathsf{S}_2 \mathsf{L}_1, \\ \mathsf{H}_{\text{series}} &= \mathsf{H}_1 + \mathsf{H}_2 + Im\left\{\mathsf{L}_2^\dagger \mathsf{S}_2 \mathsf{L}_1\right\}. \end{aligned}}$$

In-loop system



$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathsf{L}_0^\dagger \mathsf{L}_0 - i\mathsf{H}_0 & 0 & 0 & -\mathsf{L}_0^\dagger \mathsf{S}_0 \\ 0 & T_{11} & T_{12} & 0 \\ 0 & T_{21} & T_{22} & 0 \\ \mathsf{L}_0 & 0 & 0 & \mathsf{S}_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{S}_{\mathtt{ii}} = \begin{pmatrix} T_{22} & 0 \\ 0 & \mathsf{S}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{S}_{\mathtt{ie}} = \begin{pmatrix} T_{21} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{S}_{\mathtt{ei}} = (T_{12}, 0), \quad \mathsf{S}_{\mathtt{ee}} = T_{11},$$

$$\mathsf{L}_{\mathtt{i}} = \begin{pmatrix} \mathsf{L}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}_{\mathtt{e}} = 0, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eliminate both internal edges simultaneously

$$\mathsf{S}_{\rm red} = T_{11} + \begin{pmatrix} T_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{22} & 1 \\ 1 & \mathsf{S}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T_{21} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= T_{11} + T_{12} \left(\mathsf{S}_0^{-1} - T_{22}\right)^{-1} T_{21}\,,$$

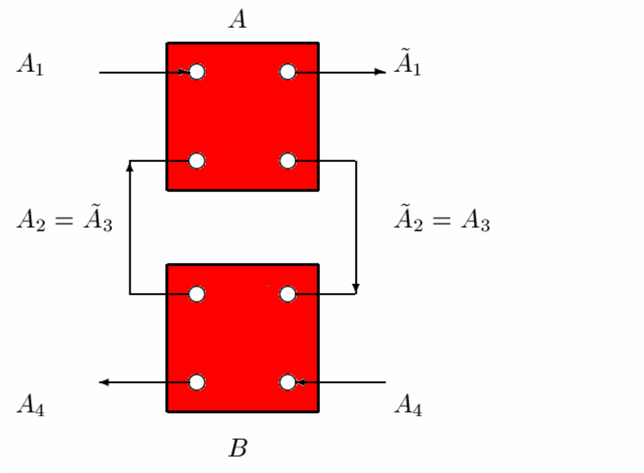
$$\mathsf{L}_{\rm red} = \begin{pmatrix} T_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{22} & 1 \\ 1 & \mathsf{S}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{L}_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_{12} \left(1 - \mathsf{S}_0 T_{22}\right)^{-1} \mathsf{L}_0,$$

$$\mathsf{H}_{\rm red} = \mathsf{H}_0 + Im \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{L}_0^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{22} & 1 \\ 1 & \mathsf{S}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathsf{L}_0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathsf{H}_0 + Im\, \mathsf{L}_0^{\dagger} \left(1 - \mathsf{S}_0 T_{22}\right)^{-1} \mathsf{L}_0.$$

Redheffer Star-Product

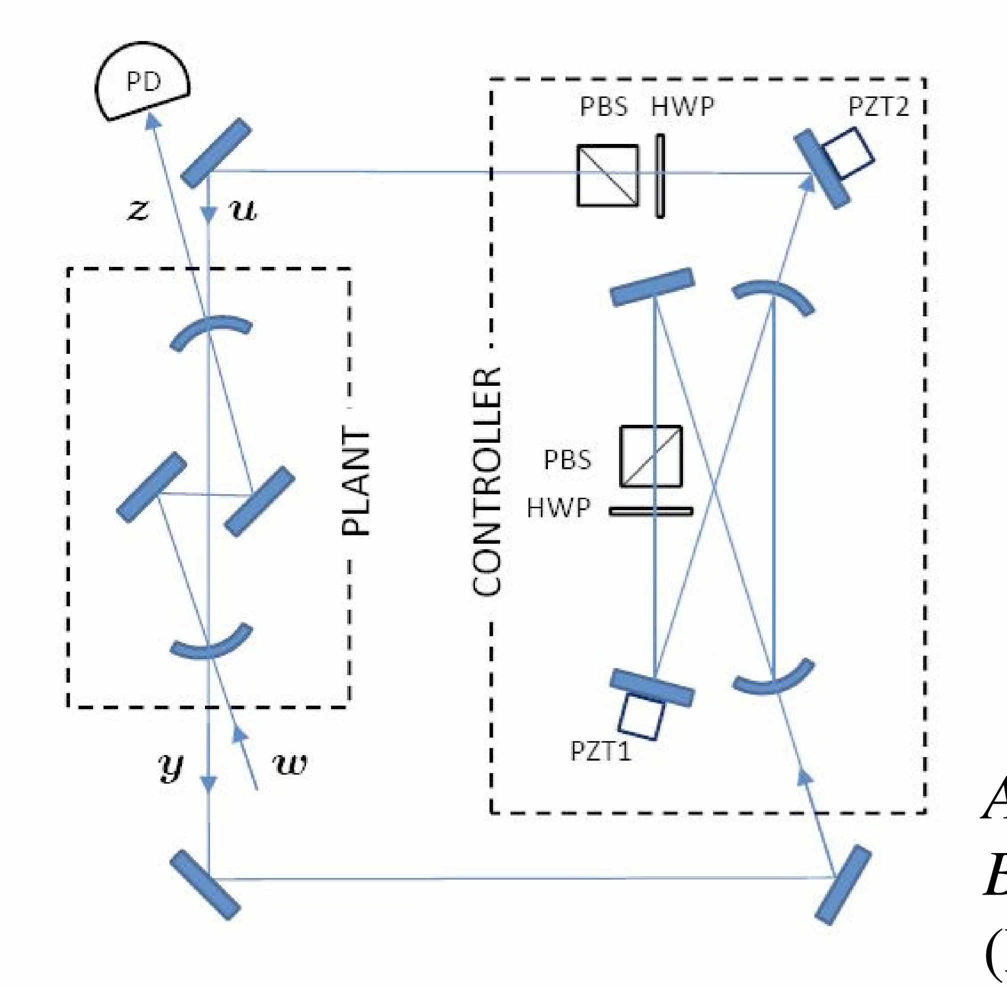


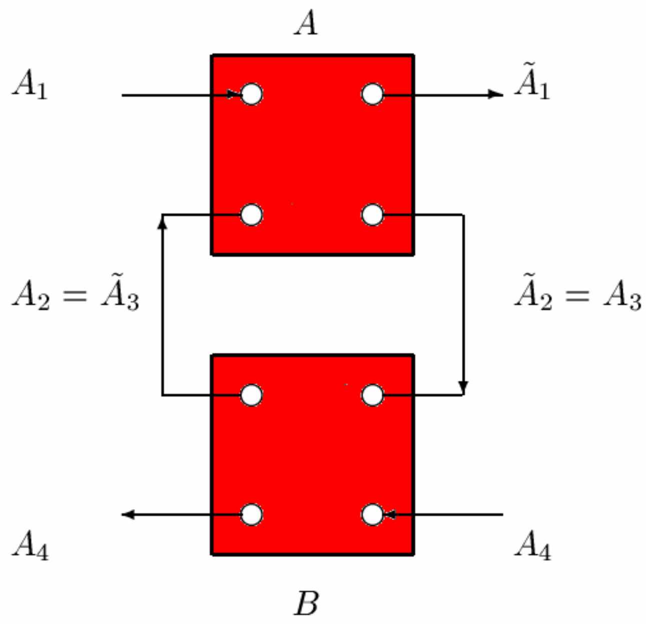
$$\mathsf{S}_{ee} = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^A_{11} & 0 \\ 0 & \mathsf{S}^B_{44} \end{pmatrix}, \mathsf{S}_{ei} = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^A_{12} & 0 \\ 0 & \mathsf{S}^B_{43} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{S}_{ie} = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^A_{21} & 0 \\ 0 & \mathsf{S}^B_{34} \end{pmatrix}, \mathsf{S}_{ii} = \begin{pmatrix} \mathsf{S}^A_{22} & 0 \\ 0 & \mathsf{S}^B_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{L}_e = \begin{pmatrix} \mathsf{L}^A_1 \\ \mathsf{L}^B_4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{L}_i = \begin{pmatrix} \mathsf{L}^A_2 \\ \mathsf{L}^B_3 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example from Coherent Control: Hideo Mabuchi





A is the plant,
B is the controller.
(No beam-splitter!)