GRPR-RT-9507
octobre 1995

Modélisation de l'Objet et application à ses représentations

Frédéric Labrosse

Groupe de Recherche en Perception et Robotique

École Polytechnique de Montréal
GRPR - DGEGI
C.P. 6079, succursale Centre-ville
Montréal (Québec) CANADA H3C 3A7

labrosse@ai.polymtl.ca

Résumé

Ce document présente un modèle générique d'objet ne dépendant pas ni de la tâche à accomplir avec l'objet (dont la représentation utilisée pour exécuter la tâche est une instance du modèle) ni de l'agent qui exécute la tâche. Cette indépendance permet de passer d'une représentation à une autre d'un même objet si la tâche ou l'agent change. Le modèle ne fait aucune supposition sur les objets, si ce n'est qu'ils soient représentables. Dans ce modèle, les objets sont représentés par leur géométrie et par un ensemble d'attributs tels que la couleur, la densité ou la température (la géométrie sera par la suite considérée comme un des attributs). La structure de la représentation, décrivant les attributs, est hiérarchique. Chaque attribut y est représenté indépendamment des autres et les relations existant entre les différents attributs à un niveau donné ou entre les différents niveaux sont représentées par des graphes.

Ce travail a été subventionné par la chaire CRSNG-Noranda en automatisation minière.

Publié en octobre 1995.

Modélisation de l'Objet et application à ses représentations

GRPR-RT-9507

Frédéric Labrosse
(Groupe de Recherche en Perception et Robotique)

Pour se procurer une copie de ce document, voir à l'adresse électronique suivante :

`http://www.ai.polymtl.ca/`

ou s'adresser au :

Groupe de Recherche en Perception et Robotique
École Polytechnique de Montréal
Pavillon André Aisenstadt — local 5467
Case postale 6079, Succursale Centre-ville
Montréal (Québec) CANADA H3C 3A7

Téléphone : (514) 340-5783
Télécopieur : (514) 340-5802

1 Introduction

On peut avoir de nombreuses représentations différentes d'un même objet suivant la tâche à accomplir avec celui-ci et l'agent exécutant cette tâche. Les modèles déjà existant sont myopes, c'est à dire qu'ils dépendent fortement de la tâche et de l'agent et, pour certains, du type des objets à représenter. Cette dépendance pose un problème. Si on a une représentation d'un objet pour une tâche et un agent donnés et que l'un ou l'autre vient à changer, alors il faut construire une nouvelle représentation suivant un nouveau modèle. Ceci implique généralement d'oublier la première représentation, ce qui peut être une perte d'information coûteuse. Ces modèles ne sont, souvent, pas capables de tenir compte de la dynamique des objets ni de représenter autre chose que la géométrie des objets.

C'est pourquoi je propose un modèle ne dépendant pas ni de la tâche ni de l'agent, capable de représenter des attributs variables et variés de l'objet. La structure de la représentation, décrivant les attributs, est hiérarchique, chaque attribut y étant représenté indépendamment des autres. Les relations existantes entre les différents attributs à un niveau donné ou entre les différents niveaux sont représentées par des graphes, structure permettant aisément de propager dans un certain voisinage toute modification intervenant sur un nœud du graphe.

On va représenter un objet physique $\mathcal{O}$, c'est à dire appartenant au monde physique (ou réel), par certains attributs comme la couleur, la densité, la solidité, etc. Un des attributs doit être géométrique afin de pouvoir décrire la géométrie de l'objet $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ une représentation de cet objet. Celle-ci est composée de trois éléments : une structure hiérarchique décrivant les différents attributs, un ensemble de graphes exprimant des relations inter-attributs et un ensemble de correspondances entre les différents attributs.

Le premier élément de la représentation va décrire la structure de l'objet. On peut décomposer un objet physique en un arbre de sous-objets. À cet arbre se greffe un ensemble de graphes discrets qui décrivent des relations entre les sous-objets d'un même niveau dans l'arbre et dérivant d'un même objet. Une de ces relations doit exprimer la connexion entre les sous-objets. On a, de plus, un graphe qui permet de décrire des connexions entre des sous-objets de niveaux différents dans l'arbre. D'autre part, on va quantifier les objets de l'arbre. Je montrerai comment définir un tel arbre, de tels graphes et de telles quantifications pour chaque attribut de l'objet. La *structure de l'objet* est l'ensemble, pour tous les attributs, de tous les arbres, de tous les graphes et de toutes les quantifications des nœuds des arbres. Elle est décrite à la section 4.1.

Le deuxième élément de la représentation est un ensemble de graphes servant à exprimer des relations entre les différents attributs (par opposition aux graphes de la structure qui représentent des relations intra-attribut). Les graphes exprimant ces *relations inter-attributs* sont discrets. Les relations inter-attributs sont décrites à la section 4.2.

Enfin, le troisième et dernier élément de la représentation est un ensemble de *correspondances* entre les différents attributs. Ces correspondances servent, par exemple, à spécifier les valeurs des attributs en chaque point de l'objet physique. Elles sont décrites à la section 4.3.

Réseau routier (1) : Tout au long du document, je vais introduire les concepts décrits à l'aide d'un exemple. Celui-ci sera une représentation, parmi de nombreuses possibles, d'un réseau routier avec son trafic de voitures, ses limites de vitesse, l'état de la chaussée, etc. Le réseau sera supposé non urbain. Chacune des parties du document appelées “Réseau routier” est une partie de l'exemple.

Représentation (1.a) : Dans ces parties du document, appelées “Représentation”, le formalisme développé sera appliqué à la partie correspondante de l'exemple.

La section 2 donnera une brève bibliographie. Nous aurons à la section 3 un certain nombre de notations utiles à la description du modèle. La section 4 est consacrée à la description du modèle. Enfin, la section 5 parlera de la construction d'une représentation suivant ce modèle.

2 La représentation des objets dans la littérature

La représentation des objets a beaucoup été abordée dans la littérature et ce pour différents problèmes.

Un de ceux-ci est la navigation (incluant le positionnement, la planification, etc.) de robots mobiles. Il faut alors représenter l'environnement des robots. C'est d'ailleurs ce type de représentation qui a motivé ce travail. Les environnements ont été représentés comme des grilles d'occupation. La grille peut être régulière (comme dans [Elf87]) ou irrégulière (par exemple des “quadtrees”). Cette représentation est de très bas niveau. Les obstacles peuvent aussi être représentés sous une forme de plus haut niveau (par exemple des polygones, des lignes(1) ou des “B-splines”(2)). Une revue assez complète, pour la planification de chemin, est donnée dans [HA92]. Mais ces représentations sont de très bas niveau et, donc, très rigides. Il y est très difficile de propager une modification devant influer un certain voisinage. D'autre part, elles n'utilisent, en général, qu'un seul type de primitive. À l'autre extrémité des niveaux de représentation, [CL85] représente un environnement décomposé en éléments topologiques tels que des salles ou des corridors. Ces éléments sont les nœuds d'un graphe dont les arcs sont les passages d'un élément topologique à un autre (les portes). [KB87] propose un modèle topologique dont les nœuds sont des endroits de l'environnement qui sont distinctifs par rapport à leur environnement immédiat. Dans [KK92], on trouve une description d'un environnement intérieur (corridors, bureaux) en un ensembles de faces (des pans de mur) reliées entre elles par une relation de connexion, chacune d'elles pointant sur un ensemble de segments visuellement significatifs. Ces segments servent de “landmarks” pour reconnaître l'endroit où se trouve le robot. Mais cette décomposition est rigide dans la mesure où elle ne contient que des faces et des segments de droite et ne s'applique donc pas à un environnement intérieur dont les murs ne sont pas plats (ce qui se produit de plus en plus dans l'architecture moderne). Dans ces représentations, il est facile de déplacer la position physique d'un élément topologique.

Certains auteurs ajoutent à leur représentation des attributs autre que la géométrie de l'environnement. On peut avoir un ensemble de bitmaps chacun exprimant un attribut particulier comme la couverture du sol, les propriétés hydrométriques, un indice de traversabilité, la visibilité par un ennemi, etc., ([Mit89]). Un attribut peut aussi être un label indiquant si le pixel du bitmap correspond à une zone plate, à une zone accidentée, à un obstacle ou à une

(1)Par exemple, dans [MD94], des lignes sont extraites à partir de mesures venant d'un sonar.

(2)Dans [LCF+94], une approximation au sens des moindres carrés est faite sur une carte d'élévation ($z = f(x, y)$) avec des “B-splines”. Une première “B-spline” est calculée sur une grille grossière. Là où l'erreur est importante, une nouvelle “B-spline” est calculée sur une grille plus fine. Finalement, cela conduit à un arbre dont les nœuds sont des “B-splines”.

zone inconnue ([LCF+94]). Chaque valeur du label correspond à un mode de navigation. Les valeurs de ces attributs forment des régions dans l'environnement qui permettent de construire un graphe dont les nœuds sont les régions et dont les arcs sont les frontières entre les régions adjacentes ([Mit89]) ou dont les nœuds sont le point milieu de chaque frontière et dont les arcs correspondent à la traversée d'une région ([LCF+94]). Mais, à cause des bitmaps, les valeurs des attributs sont très intimement liées aux positions physique et la propagation d'une modification locale d'un attribut est impossible.

Un autre problème impliquant la représentation d'objets est la reconnaissance. Dans son système ACRONYM, Brooks ([Bro83]) représente les objets à l'aide de cylindres généralisés. D'autres primitives géométriques très utilisées pour la représentation appartiennent à la famille des cylindres ([Mar82]) ou des superquadriques ([Pen90, WF91]). Mais, souvent, des primitives de toutes tailles cohabitent dans une représentation à un seul niveau. Le système MOSAIC ([WH89]), quant à lui, représente des objets faits de prismes rectangulaires. Les objets y sont représentés comme des graphes d'éléments topologiques, comme des sommets, des arrêtes, des groupes d'arrêtes et des faces. Ces entités sont liées les unes aux autres par des liens topologiques et à la structure géométrique par des liens de contraintes géométriques. Dans [BCK+89], une représentation aussi basée sur des sommets, des arrêtes et des faces et proposée. Mais elle utilise un étiquetage de ces entités(3) ainsi que des contraintes venant de la connaissance qu'on a des objets. Mais ces représentations dépendent très fortement du type d'objet représenté (des prismes rectangulaires) à cause des primitives utilisées et des contraintes servant à construire la représentation (coplanarité de points, orthogonalité de segments). Ces types de représentation pourront aussi servir à la manipulation d'objets. Par exemple, Allen ([All88]) utilise des superquadriques pour représenter les objets. Toutes ces représentations utilisent un nombre restreint de types de primitive, ceux-ci étant fixés à l'avance. D'autre part, souvent ces représentations ne contiennent pas d'autre attribut que la géométrie.

Quelque soit le problème traité, la hiérarchie de la représentation augmente sa stabilité. En effet, cela permet d'inclure des primitives de différentes tailles tout en découplant les relations spatiales locales des relations spatiales globales ([Mar82]).

3 Notations

On note $\mathrm{G}_r(A, B)$ le graphe de la relation r :

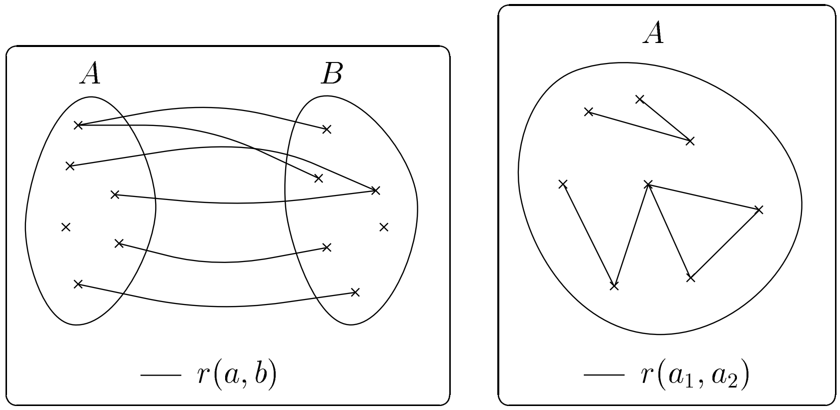
$$\mathrm{G}_r(A, B) = \{(a, b) \in A \times B \mid r(a, b)\} \tag{1}$$

où $r(a, b)$ indique que a est en relation avec b suivant la relation r (figure 1(a)). Quand les ensembles A et B sont égaux, on écrira $\mathrm{G}_r(A)$ (figure 1(b)) :

$$\mathrm{G}_r(A) = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid r(a_1, a_2)\}. \tag{2}$$

Les graphes peuvent être uni ou bidirectionnels, discrets ou continus (presque partout).

(3)Un sommet est étiqueté en fonction du type de jonction formée par les arrêtes arrivant au sommet, une arrête est étiquetée suivant qu'elle est convexe, concave ou occultante et une face est étiquetée suivant qu'elle appartient au fond, qu'elle est visible ou partiellement occluse.



(a) Entre deux ensembles (b) Dans un ensemble

Figure 1 : Graphes exprimant une relation r

Cela sera spécifié au besoin. Soit $\Gamma(A, B)$ l'ensemble des graphes définis sur les ensembles A et B :

$$\Gamma(A, B) = \{\mathrm{G} \mid \mathrm{G} \subset A \times B\}. \tag{3}$$

On appelle première [respectivement deuxième] projection d'un graphe $\mathrm{G}(A, B)$ l'ensemble $\mathrm{pr}_1\mathrm{G}$ [respectivement $\mathrm{pr}_2\mathrm{G}$] tel que :

$$\forall a \in A, (a \in \mathrm{pr}_1\mathrm{G}) \Leftrightarrow (\exists b \in B \mid (a, b) \in \mathrm{G}) \tag{4}$$

$$[\text{resp. } \forall b \in B, (b \in \mathrm{pr}_2\mathrm{G}) \Leftrightarrow (\exists a \in A \mid (a, b) \in \mathrm{G})]. \tag{5}$$

On appelle correspondance de D vers A tout triplet $\mathrm{C} = (\mathrm{G}, D, A)$ où D et A sont les ensembles que l'on appellera respectivement ensemble de départ et ensemble d'arrivée et $\mathrm{G} \in \Gamma(D, A)$ est un graphe de D vers A. $\mathrm{pr}_1\mathrm{G}$ est l'ensemble de définition et $\mathrm{pr}_2\mathrm{G}$ est l'ensemble des valeurs (ou image). Par extension (et pour faciliter la notation), on appellera $\mathrm{pr}_1\mathrm{C}$ [respectivement $\mathrm{pr}_2\mathrm{C}$] l'ensemble $\mathrm{pr}_1\mathrm{G}$ [respectivement $\mathrm{pr}_2\mathrm{G}$].

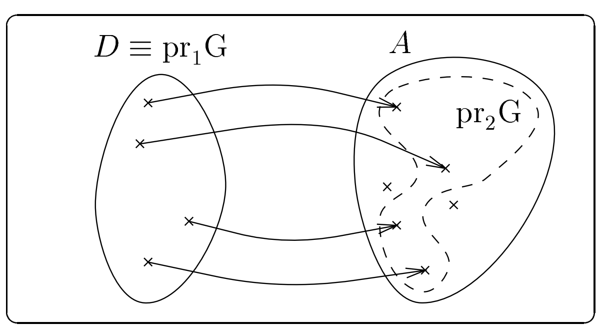


Figure 2 : Une application

Une application $f = (\mathrm{G}, D, A)$ est une correspondance telle que tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée (figure 2) :

$$\forall d \in D, \exists! a \in A \mid (d, a) \in \mathrm{G}. \tag{6}$$

L'ensemble des applications de D vers A est noté $\mathcal{F}(D, A)$.

4 Le modèle

Réseau routier (2) : Notre réseau routier a une géométrie : la longueur, la courbure et la largeur des routes, la disposition de celles-ci l'une par rapport à l'autre, etc. Mais le réseau a aussi des attributs qui ne sont pas géométriques. On a par exemple le trafic de voitures en chaque point du réseau, l'état de la chaussée, etc.

Un objet physique (c'est à dire appartenant au monde physique) a des *attributs*, comme par exemple la couleur, la température, la densité, etc. Un des attributs est nécessairement l'attribut géométrique (tout objet physique a une géométrie). On va donc représenter un objet physique par son attribut géométrique et, éventuellement, par un ou des attributs non géométriques. Le k-ième attribut est noté A_k. Par définition, A_0 est l'attribut géométrique et on a N attributs non géométriques.

Réseau routier (3) : Sur une route donnée, le trafic de voitures peut avoir un ou deux sens. Une route, du moins en Amérique du nord, peut être nord-sud ou est-ouest. Cela donne quatre possibilités pour le trafic de voitures (trafic vers le nord, vers le sud, vers l'est ou vers l'ouest) plus une valeur qui indique “pas de trafic” (pour le cas où une route est en sens unique). Le trafic dépend de la densité de voitures sur la route mais aussi de la vitesse des voitures. De plus, à un point donné du réseau, le trafic varie en fonction de l'heure dans la journée. Plus tard, on donnera même une matrice de covariance sur la densité et la vitesse du trafic (ce qui fait trois paramètres supplémentaires : la matrice est 2×2 symétrique). Pour l'instant on n'utilisera pas cette matrice de covariance. On représentera donc, dans notre exemple, le trafic dans un espace à quatre dimensions : une pour la densité, une pour la vitesse, une pour la direction et enfin une pour l'heure.

En chaque point du réseau on a une valeur du trafic (donc quatre paramètres). Cela donne donc un nuage de points dans notre espace 4-D[(4)]. Quand on regarde ce nuage de différentes distances dans l'espace 4-D, on voit apparaître des groupements de points. Si on regarde de très loin, le groupement aura une valeur qui sera, par exemple, la moyenne des valeurs des points du groupe. Si on regarde d'un peu plus près, on n'aura plus *une* valeur mais, par exemple, une hyper-surface de valeurs. On voit donc apparaître des objets dans l'espace 4-D qui sont ces groupements de points vus à différents niveaux.

Chaque attribut A_k va être représenté dans un espace qui lui est propre, c'est à dire que l'attribut va prendre ses valeurs dans cet espace. Ces points, vus à différents niveaux, font apparaître des amas que j'appelle *objets-attributs*. Pour l'attribut A_k, l'ensemble des objets ainsi définis est Ω_k. Autrement dit, Ω_k contient tous les objets définissables dans l'espace de représentation de l'attribut A_k. Si l'attribut en question est l'attribut géométrique, alors les objets seront des *objets physiques*. Par la suite, le symbole $\mathcal{A}$ sera utilisé pour désigner un objet-attribut générique. Les indices seront omis quand on ne parlera pas d'un attribut en particulier. L'objet physique que l'on veut représenter appartient à Ω_0 qui est, par définition, l'ensemble de tous les objets physiques.

[(4)]On remarque que la représentation du trafic ne contient pas les points du réseau routier qui supportent les valeurs de trafic. Ce sont des correspondances qui vont faire la connexion entre l'espace de représentation du trafic et la géométrie du réseau (voir Réseau routier (11)).

Réseau routier (4) : Intéressons nous à la géométrie du réseau. Dans un premier niveau de représentation, on pourra décomposer le réseau en un ensemble de routes et d'intersections. Une route est délimitée par deux intersections. On pourra ainsi établir des graphes dont les nœuds sont des routes et des intersections. Un premier graphe représente les connexions qu'il y a entre les routes et les intersections. Les arcs de ce graphe sont bidirectionnels. On va ensuite représenter des relations qui seront, dans notre cas, les suivantes : ≪est au nord de≫, ≪est au sud de≫, ≪est à l'est de≫ et ≪est à l'ouest de≫. Cela donne quatre nouveaux graphes unidirectionnels. On pourra associer à chaque route une valeur qui est la longueur de la route et à chaque intersection sa position dans un référentiel terrestre. On choisit de faire correspondre à chaque route une valeur du trafic : une valeur moyenne de densité et de vitesse sur toute la journée, et ce pour chaque sens de parcours des routes[(5)].

Ensuite, toujours dans notre représentation particulière, chaque route va être décomposée en tronçons de route suivant un critère donné : par exemple, la limite de vitesse. Ceci va conduire à un ensemble de graphes pour chaque route de l'étape précédente. Un premier graphe va exprimer les connexions entre les tronçons. On choisit aussi d'exprimer les quatre relations ≪est au nord de≫, ≪est au sud de≫, ≪est à l'est de≫ et ≪est à l'ouest de≫. Les tronçons de route seront représentés comme des rubans : une courbe (paramétrique) 3-D dans le référentiel terrestre avec une largeur en chaque point de la courbe[(6)]. À chaque point de la courbe 3-D (celle exprimée dans le référentiel terrestre), on va faire correspondre deux valeurs du trafic de voitures[(7)]. Ces valeurs sont des fonctions du temps.

La représentation $\mathcal{R}$ de l'objet physique $\mathcal{O}$ est un triplet contenant la *structure* de l'objet, un ensemble de graphes exprimant des *relations inter-attributs* de l'objet et un ensemble de *correspondances* entre les attributs de l'objet.

Chaque objet-attribut $\mathcal{A}$ est décomposable en un ensemble de sous-objets-attributs a. On peut exprimer un certain nombre de relations entre ces sous-objets-attributs a dont au moins une est une relation de connexion. Ces relations sont exprimées à l'aide de graphes discrets. L'ensemble de sous-objets-attributs d'un objet-attribut $\mathcal{A}$ ainsi que l'ensemble des graphes de relation entre ces sous-objets-attributs forment la *topologie* de l'objet $\mathcal{A}$. De plus, chaque sous-objet-attribut a se décompose lui-même en sous-sous-objets. Ainsi, on forme un arbre dont les nœuds sont des objets-attributs. Si l'attribut est l'attribut géométrique, alors la racine de l'arbre est l'objet physique que l'on représente. On va voir que les connexions déjà exprimées ne sont pas suffisantes et que des connexions généralisées entre des éléments des différents niveaux de l'arbre sont donc nécessaires. Je définis donc un graphe de *connexions généralisées*. D'autre part, chaque sous-objet-attribut a est quantifiable à l'aide d'une *application métrique*. L'ensemble de toutes les applications métriques des sous-objets a de l'objet $\mathcal{A}$ forme la *métrique* de l'objet $\mathcal{A}$. L'ensemble des topologies, des métriques et des graphes de connexions généralisées forme la *structure* de l'objet physique $\mathcal{O}$. Elle sera notée ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{S}(\mathcal{O})$ dans la représentation $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ quand aucune confusion sur la représentation n'est possible.

Les graphes de relations servent à exprimer des relations entre des objets-attributs des différents attributs. L'ensemble de ces graphes de *relations inter-attributs* pour l'objet $\mathcal{O}$

[(5)] Si la route est en sens unique, un des trafics est nul.

[(6)] Ceci donne une courbe 4-D.

[(7)] Malgré le fait qu'il n'y ait pas d'intersection sur les routes (elles ont été "éliminées" à l'étape précédente), le trafic n'est pas constant. Par contre, le flux de voitures l'est.

dans la représentation $\mathcal{R}$ sera noté ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{G}(\mathcal{O})$. L'indice $\mathcal{R}$ est omis quand aucune confusion sur la représentation n'est possible. Les relations inter-attributs peuvent être, par exemple, « Sur l'objet, une zone rouge est à droite d'une zone dure ».

Les *correspondances* entre attributs servent à spécifier des associations entre des valeurs, des objets-attributs ou des applications métriques de différents attributs. Notamment, un des attributs peut être géométrique et concerne donc des points d'objets physiques, des objets physiques ou des applications métriques géométriques. Ces correspondances servent à dire « Tel point d'un objet physique est rouge tandis que tel autre est bleu » ou « Dans une image infrarouge, telle couleur correspond à telle température ». On note ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{C}(\mathcal{O})$ l'ensemble des correspondances de l'objet $\mathcal{O}$ dans la représentation $\mathcal{R}$. L'indice $\mathcal{R}$ est omis quand aucune confusion sur la représentation n'est possible.

La représentation totale de l'objet est donc :

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}) = ({}^{\mathcal{R}}\mathcal{S}(\mathcal{O}), {}^{\mathcal{R}}\mathcal{G}(\mathcal{O}), {}^{\mathcal{R}}\mathcal{C}(\mathcal{O})). \tag{7}$$

Nous allons étudier chacun des éléments de ce triplet dans les sections suivantes.

4.1 La structure : les topologies et les métriques

Chaque objet-attribut $\mathcal{A}$ de l'attribut A_k est représentable par une topologie $\mathrm{T}_k(\mathcal{A})$ et éventuellement une métrique $\mathrm{M}_k(\mathcal{A})$ dépendante de la topologie. Toutefois, on notera T_k et M_k quand aucune confusion ne sera possible. L'indice k spécifiant l'attribut sera aussi omis quand on ne s'intéressera pas à un attribut particulier.

4.1.1 La topologie d'un objet de Ω_k

Réseau routier (5) : On a vu (Réseau routier (4)) que l'on a choisit de décomposer notre réseau routier en un ensemble de routes et d'intersections et qu'il y a un ensemble de graphes (exprimant les connexions entre les routes et les intersections ainsi que quatre relations) entre les éléments du réseau. L'ensemble des routes et des intersections ainsi que l'ensemble des graphes constitue la topologie de l'objet *réseau*. Notons que la topologie de la route est constituée de cette manière dans cette représentation particulière. Dans une autre représentation, elle sera tout autre.

Chaque route se décompose elle-même en tronçons de route avec, aussi, des graphes de connexions et les mêmes relations. Tout ceci constitue la topologie de l'objet *route*, encore une fois, dans cette représentation.

Soit Ω_k l'ensemble des objets d'un attribut A_k (géométrique ou non géométrique). L'objet $\mathcal{A}$ considéré est un élément de Ω_k :

$$\mathcal{A} \in \Omega_k. \tag{8}$$

On décompose cet objet en sous-objets de Ω_k. Ces sous-objets sont donc les descendants de $\mathcal{A}$. Leur ensemble est $\Delta_k(\mathcal{A})$:

$$\Delta_k(\mathcal{A}) \subset \Omega_k. \tag{9}$$

La topologie $\mathrm{T}_k(\mathcal{A})$ de l'objet $\mathcal{A}$ pour l'attribut A_k est un ensemble de graphes de deux types. Le graphe du premier type (on en a obligatoirement et uniquement un pour une représentation donnée) exprime les connexions[8] qu'il y a entre les éléments de $\Delta_k(\mathcal{A})$. Il sera noté $G_{c,k}$. Les graphes de l'autre type expriment des relations (autre que la connexion) entre les éléments de $\Delta_k(\mathcal{A})$. L'ensemble de ces graphes est $\gamma_{r,k}$. Tous les graphes de la topologie sont discrets. La figure 3 montre un exemple de topologie pour l'attribut A_k avec

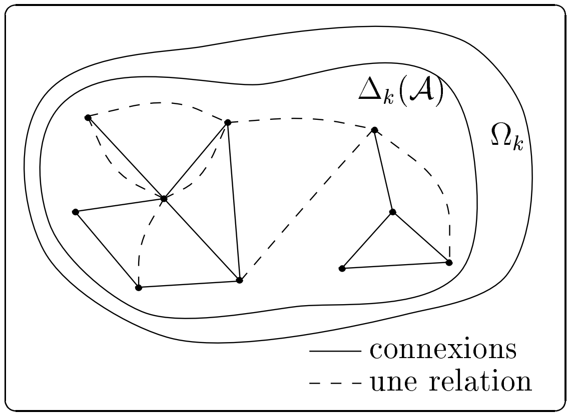


Figure 3 : La topologie de l'objet $\mathcal{A}$ pour l'attribut A_k

le graphe des connexions et le graphe d'une autre relation. La topologie d'un objet $\mathcal{A}$ est donc définie comme suit[9] :

$$T_k(\mathcal{A}) = (\Delta_k(\mathcal{A}), \{G_{c,k}(\mathcal{A})\} \cup \gamma_{r,k}(\mathcal{A})) \tag{10}$$

où

$$G_{c,k}(\mathcal{A}) \in \Gamma(\Delta_k(\mathcal{A})), \tag{11}$$
$$\gamma_{r,k}(\mathcal{A}) \subset \Gamma(\Delta_k(\mathcal{A})). \tag{12}$$

Représentation (5.a) : Formalisons la topologie du réseau routier. Les descendants du réseau (pour l'attribut géométrique) sont les intersections et les routes :

$$\Delta_0(\text{réseau}) = \{\text{intersections}\} \cup \{\text{routes}\}. \tag{13}$$

Le graphe des connexions du réseau est l'ensemble des couples formés d'une route et d'une intersection qui sont connectés entre eux :

$$\begin{aligned} &G_{c,0}(\text{réseau}) = \\ &\quad \{(\text{route}, \text{intersection}) \in \Delta_0(\text{réseau}) \times \Delta_0(\text{réseau}) \mid \\ &\qquad \text{route est connectée à intersection}\}. \end{aligned} \tag{14}$$

[8] Ces connexions seront aussi appelées des connexions “naturelles” par opposition aux connexions généralisées (voir la section 4.1.2).

[9] Pour simplifier la notation, $G_r(\mathcal{A})$ représente le graphe exprimant la relation r entre les éléments de $\Delta(\mathcal{A})$:

$$G_r(\mathcal{A}) \stackrel{\triangle}{=} G_r(\Delta(\mathcal{A}))$$

Si la paire (route, intersection) appartient à $\mathrm{G}_{c,0}$(réseau), alors la paire (intersection, route) aussi. Les quatre relations « est au nord de », « est au sud de », « est à l'est de » et « est à l'ouest de » sont représentées par l'ensemble de graphe $\gamma_{r,0}$(réseau) :

$$\gamma_{r,0}(\text{réseau}) = \{\mathrm{G}_{r_i,0}(\text{réseau})\}_{i=1\ldots4} \tag{15}$$

où les $\mathrm{G}_{r_i,0}$(réseau) sont définis comme $\mathrm{G}_{c,0}$(réseau) mais avec chacune des relations ci-dessus, celles-ci pouvant porter sur une route et une intersection, deux routes ou deux intersections.

On défini les descendants d'une route de Δ_0(réseau) comme :

$$\Delta_0(\text{réseau}) = \{\text{tronçons}\}. \tag{16}$$

Les différents graphes portant sur les tronçons sont définis comme pour le réseau.

4.1.2 Les connexions généralisées

Réseau routier (6) : Le réseau routier se décompose, dans notre représentation particulière, en éléments qui sont des routes et des intersections. Ces éléments (en fait uniquement les routes, bien qu'on aurait aussi pu décomposer les intersections) se décomposent aussi en d'autres éléments qui sont des tronçons de route. On a déjà défini des connexions entre les routes et les intersections d'une part et entre les tronçons de route d'autre part. Mais un tronçon de route peut aussi être connecté à une intersection. C'est en effet le cas pour chaque tronçon qui est à une extrémité de la route. On doit donc créer des connexions entre les différents niveaux de l'arbre.

L'objet-attribut $\mathcal{A}$ se décompose en objets dont l'ensemble est $\Delta(\mathcal{A})$. Mais, pour arriver à un niveau plus fin de représentation, on va aussi décomposer les éléments de $\Delta(\mathcal{A})$. On défini ainsi un arbre de décomposition hiérarchique d'un objet-attribut[10]. La figure 4 montre un tel arbre.

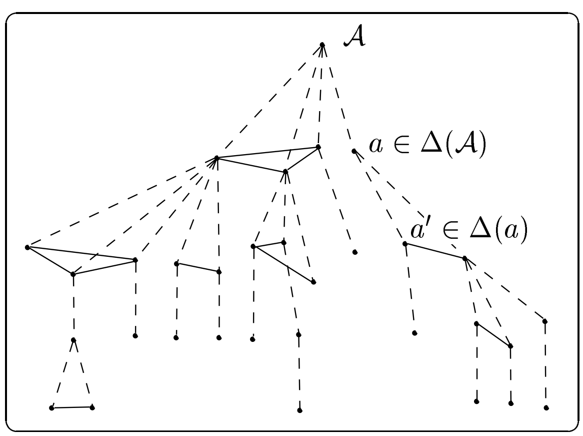


Figure 4 : Un arbre d'objets. Les connexions sont indiquées en traits pleins tandis que les traits en tirets indiquent la hiérarchie des objets.

[10] Si l'attribut est géométrique, alors la racine de l'arbre est l'objet physique que l'on représente.

Représentation (6.a) : Dans notre réseau routier, on forme un arbre dont la racine est le réseau routier et les nœuds sont les intersections et les routes au premier niveau puis les tronçons de route au second niveau.

Dans l'arbre, si deux objets a_1 et a_2 ayant le même parent immédiat sont connectés entre eux, alors, s'ils ont des descendants, il y en a certainement parmi eux qui sont connectés entre eux. Le graphe de ces connexions entre "cousins" est le graphe des connexions généralisées G_{cg}. Pour un attribut A_k, on a :

$$\mathrm{G}_{cg,k} \in \Gamma(\Omega_k). \tag{17}$$

Par la suite, l'indice k sera omis.

Définissons d'abord quelques relations de parenté.

Les relations de parenté. Que ce soit dans l'arbre des objets physiques ou dans celui des objets-attributs, on a des relations de parenté entre les objets.

On a déjà vu $\Delta(\mathcal{A})$ qui définit l'ensemble des objets définis par la topologie de l'objet $\mathcal{A}$. Autrement dit, $\Delta(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des descendants de $\mathcal{A}$[(11)].

Étendons un peu cette notation. Je définis $\Delta^i(\mathcal{A})$ (avec $i \neq 0$) l'ensemble des descendants de $\mathcal{A}$ jusqu'à la i-ème génération. Par exemple :

$$\Delta^1(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A}), \tag{18}$$

$$\Delta^2(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A}) \cup \left(\bigcup_{a \in \Delta(\mathcal{A})} \Delta(a) \right). \tag{19}$$

D'autre part, si E est un ensemble d'objets, alors :

$$\Delta^i(E) \triangleq \bigcup_{\mathcal{A} \in E} \Delta^i(\mathcal{A}). \tag{20}$$

Par extension, on note $\Delta^\infty(\mathcal{A})$ l'ensemble de tous les descendants de $\mathcal{A}$ dans la représentation considérée.

Inversement, je définis $\mathcal{P}^i(\mathcal{A})$ comme étant le i-ème parent de l'objet $\mathcal{A}$. $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est donc le parent immédiat de $\mathcal{A}$[(12)]. C'est à dire que :

$$\mathcal{A} \in \Delta(\mathcal{P}(\mathcal{A})) \tag{21}$$

pour tout $\mathcal{A}$ ayant un parent. On a par exemple :

$$\mathcal{P}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, \tag{22}$$

$$\mathcal{P}^1(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{A}), \tag{23}$$

$$\mathcal{P}^2(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{A})). \tag{24}$$

D'autre part, $\mathcal{P}^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ sera le i-ème parent commun à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ dans la représentation $\mathcal{R}$. Notamment, $\mathcal{P}^1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ est le premier parent commun à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

---

(11) Quand $\mathcal{A}$ appartient à un attribut A_k particulier, on note $\Delta_k(\mathcal{A})$.

(12) Quand $\mathcal{A}$ appartient à un attribut A_k particulier, on note $\mathcal{P}_k(\mathcal{A})$.

Représentation (6.b) : On a donc les relations suivantes :

$$\mathcal{P}_0(\text{route}) = \text{réseau}, \tag{25}$$

$$\text{intersection} \in \Delta_0(\text{réseau}), \tag{26}$$

$$\mathcal{P}_0(\text{tronçon}) = \text{route}, \tag{27}$$

$$\text{tronçon} \in \Delta_0^2(\text{réseau}). \tag{28}$$

Le graphe des connexions généralisées. Soit $\mathcal{A}$ un objet et soient a_1 et a_2 deux objets de $\Delta(\mathcal{A})$. Si a_1 et a_2 sont connectés, alors, s'ils ont des descendants, il en est parmi ceux-ci qui ont une connexion généralisée entre eux :

$$\left.\begin{array}{r}(a_1, a_2) \in \mathrm{G}_c(\mathcal{A}) \\ \Delta^\infty(a_1) \neq \emptyset \\ \Delta^\infty(a_2) \neq \emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow \exists (a_1', a_2') \in \Delta^\infty(a_1) \times \Delta^\infty(a_2) \mid (a_1', a_2') \in \mathrm{G}_{cg}. \tag{29}$$

Écrivons la réciproque. Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux objets de Ω. Le premier parent commun à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, s'il existe, est le i-ème parent de $\mathcal{A}_1$ et le j-ème parent de $\mathcal{A}_2$:

$$\mathcal{P}^1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \equiv \mathcal{P}^i(\mathcal{A}_1) \equiv \mathcal{P}^j(\mathcal{A}_2). \tag{30}$$

Alors une condition nécessaire pour que les objets $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ aient une connexion généralisée entre eux est :

$$(\mathcal{P}^{i-1}(\mathcal{A}_1), \mathcal{P}^{j-1}(\mathcal{A}_2)) \in \mathrm{G}_c(\mathcal{P}^1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)) \tag{31}$$

où G_c désigne le graphe des connexions "naturelles". Évidemment, i et j sont tous deux strictement supérieurs à 1. En effet, si $i = j = 1$, alors $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont le même parent et leur connexion éventuelle est définie par la topologie de celui-ci. Si la condition (31) n'est pas remplie (ce qui est le cas pour les objets $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ de la figure 5), alors les objets ne peuvent pas avoir de connexion généralisée entre eux.

Si on a trouvé $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ liés par une connexion généralisée, alors toutes les paires de eux-mêmes et de leurs parents respectifs jusqu'à leur parent commun appartiennent aussi au graphe des connexions généralisées :

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \in \mathrm{G}_{cg} \Rightarrow (\mathcal{P}^k(\mathcal{A}_1), \mathcal{P}^l(\mathcal{A}_2)) \in \mathrm{G}_{cg}\ \forall (k, l) \in [0\,; i-1] \times [0\,; j-1] \setminus \{(0,0), (i-1, j-1)\}. \tag{32}$$

La figure 5 montre les connexions généralisées dans un arbre d'objets avec les graphes de connexions "naturelles".

Représentation (6.c) : La condition nécessaire pour qu'il y ait une connexion généralisée entre un tronçon de route et une intersection, c'est à dire $(\text{tronçon}, \text{intersection}) \in \mathrm{G}_{cg,0}$, est que la route à laquelle appartient le tronçon doit être connectée à l'intersection, soit $(\mathcal{P}(\text{tronçon}), \text{intersection}) \in \mathrm{G}_{c,0}(\text{réseau})$. D'autre part, si une route est connectée à une intersection, alors il y a certainement un tronçon de cette route qui est connecté à l'intersection :

$$\begin{aligned}&(\text{route}, \text{intersection}) \in \mathrm{G}_{c,0}(\text{réseau}) \Rightarrow \\ &\qquad \exists \text{tronçon} \in \Delta_0(\text{route}) \mid (\text{tronçon}, \text{intersection}) \in \mathrm{G}_{cg,0}.\end{aligned} \tag{33}$$

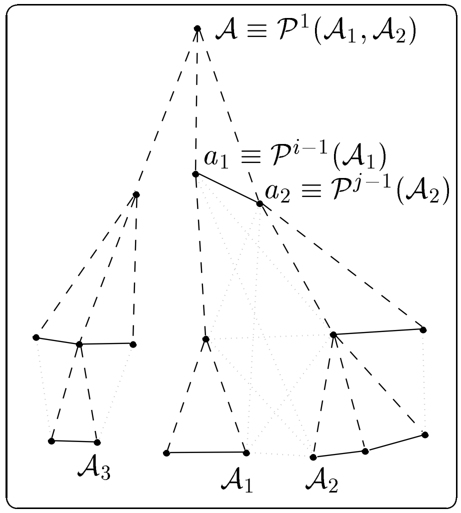


Figure 5 : Les connexions généralisées. Elles sont indiquées par les traits en pointillés.

4.1.3 La métrique d'un objet de Ω_k

Réseau routier (7) : Chaque route du réseau a une longueur et chaque intersection a une position. L'ensemble de ces valeurs métriques constitue la métrique de l'objet *réseau*.

Chaque tronçon de chaque route est représenté par un ruban, soit une courbe paramétrique représentant la géométrie du tronçon dans le référentiel terrestre et la largeur du ruban en chaque point de la courbe. L'ensemble de ces courbes constitue la métrique de l'objet *route* dans notre représentation[13].

La métrique est un ensemble d'applications métriques (métriques dans le sens où elles expriment une mesure). Ces applications métriques vont quantifier les sous-objets composant l'objet-attribut $\mathcal{A}$ de l'attribut A_k. On appelle $\mathrm{m}_k(a)$ l'application métrique de l'objet a qui est un sous-objet défini par le graphe des connexions de l'objet $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{m}_k(a) = (\mathrm{G}_{\mathrm{m}_k}, D, A). \tag{34}$$

On peut noter $\mathrm{m}_k(a)$ comme m_k si aucune confusion n'est possible. D'où la métrique de l'objet $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{M}_k(\mathcal{A}) = \{\mathrm{m}_k(a) \mid a \in \Delta_k(\mathcal{A})\}. \tag{35}$$

Si l'attribut A_k n'est pas quantifié, alors on a $\mathrm{M}_k \equiv \emptyset$.

Il est possible que l'objet a ait lui-même des descendants, auquel cas on peut définir une métrique pour a, soit $\mathrm{M}_k(a)$. On va voir à la section 4.1.4 que $\mathrm{m}_k(a)$ n'est pas indépendant de $\mathrm{M}_k(a)$.

Représentation (7.a) : Une route est quantifiée simplement avec un nombre réel L :

$$\mathrm{m}_0(\text{route}) = (\mathrm{G}, \{L\}, \mathbb{R}). \tag{36}$$

---

[13]J'insiste beaucoup sur le fait que l'exemple ne présente qu'une représentation possible parmi l'infinité de celles qui le sont. C'est en effet un point important.

Le graphe G est simplement l'identité. Une intersection est quantifiée par trois nombres réels x, y et z :

$$\mathrm{m}_0(\text{intersection}) = (\mathrm{G}, \{(x, y, z)\}, \mathbb{R}^3). \tag{37}$$

Le graphe G est aussi l'identité. La métrique du réseau est donc :

$$\mathrm{M}_0(\text{réseau}) = \{\mathrm{m}_0(\text{route})\}_{\text{route} \in \Delta(\text{réseau})} \cup \{\mathrm{m}_0(\text{intersection})\}_{\text{intersection} \in \Delta(\text{réseau})}. \tag{38}$$

Un tronçon de route est quantifié par une courbe paramétrique (de paramètre p dans l'intervalle réel $[0\,;1]$) qui donne la position de chaque point du tronçon (x, y et z) et la largeur l du ruban en chaque point :

$$\mathrm{m}_0(\text{tronçon}) = (\mathrm{G}, [0\,;1], \mathbb{R}^4). \tag{39}$$

Le graphe est décrit par quatre applications f_i :

$$x = f_1(p), \tag{40}$$

$$y = f_2(p), \tag{41}$$

$$z = f_3(p), \tag{42}$$

$$l = f_4(p). \tag{43}$$

La métrique d'une route est donc :

$$\mathrm{M}_0(\text{route}) = \{\mathrm{m}_0(\text{tronçon})\}_{\text{tronçon} \in \Delta(\text{route})}. \tag{44}$$

4.1.4 Propagation des applications métriques

Réseau routier (8) : L'information de longueur d'une route est contenue dans les courbes paramétriques des tronçons de route : c'est la somme des longueurs des courbes projetées dans le référentiel terrestre (sans la coordonnée de largeur du tronçon). De même, la longueur totale du réseau routier s'obtient en sommant la longueur de toutes les routes le composant tandis que sa superficie est l'aire de l'enveloppe convexe des intersections du réseau (dans une première approximation).

Dans la hiérarchie d'un attribut donné, on doit pouvoir retrouver une information métrique similaire entre deux niveaux consécutifs. Cela veut dire que l'application métrique d'un objet à un niveau donné doit contenir au moins l'information représentée par l'application métrique de son parent. Cela ne veut pas dire que l'information doit se retrouver sous la même forme aux deux niveaux, mais que l'on doit pouvoir extraire celle du niveau grossier à partir de celle du niveau le plus fin. Autrement dit, on doit pouvoir exprimer l'application métrique d'un objet-attribut $\mathcal{A}$ en fonction des applications métriques des objets-attributs a de $\Delta(\mathcal{A})$. On a donc une application m_p représentant cette métrique propagée. Son ensemble de départ est l'ensemble des valeurs prises par les applications métriques des objets a. Son ensemble d'arrivée représente l'application métrique de l'objet $\mathcal{A}$.

$$\mathrm{m}_{p,k}(\mathcal{A}) \in \mathcal{F}\left(\bigcup_{\mathrm{m}_k(a) \in \mathrm{M}_k(\mathcal{A})} \mathrm{pr}_2 \mathrm{m}_k(a), A\right) \tag{45}$$

où $\mathrm{m}_{p,k}$ est une métrique propagée pour l'attribut A_k.

Notons que ceci est le moyen d'avoir une application métrique pour l'objet qui est à la racine de l'arbre des objets.

Représentation (8.a) : On va quantifier le réseau complet par sa longueur totale L. C'est la somme des longueurs de toutes les routes le composant :

$$\mathrm{m}_{p,0}(\text{réseau}) = \left(\mathrm{G}, \bigcup_{\text{route}\in\Delta(\text{réseau})} l(\text{route}), \mathbb{R}\right) \tag{46}$$

où $l(\text{route})$ est la longueur d'une route :

$$l(\text{route}) \in \mathrm{pr}_2\mathrm{m}_0(\text{route}) \tag{47}$$

Le graphe G est décrit par :

$$L = \sum_{\text{route}\in\Delta(\text{réseau})} l(\text{route}). \tag{48}$$

4.1.5 Dépendance des attributs

Réseau routier (9) : On veut représenter la “roulabilité” d'une route, c'est à dire la vitesse la plus élevée à laquelle on peut rouler sur une route (sans se baser sur les limitations de vitesse ou le trafic). Elle dépend de la largeur et de la courbure de la route ainsi que de l'état de la chaussée.

Il est possible que certains attributs soient dépendants d'autres attributs. Dans ce cas, on exprime l'application métrique m_i de l'attribut A_i en fonction des valeurs prises par les attributs A_k dont A_i dépend. Plus précisément, l'ensemble de départ de m_i sera l'ensemble des ensembles d'arrivée des applications métriques m_k des A_k :

$$\mathrm{m}_i \in \mathcal{F}\left(\bigcup_k \mathrm{pr}_2\mathrm{m}_k, A\right). \tag{49}$$

Représentation (9.a) : Dans notre exemple, m_i est l'application métrique de la roulabilité. On va représenter celle-ci par un indice réel dans $[0\,;1]$ (ce qui constitue l'ensemble d'arrivée). L'ensemble de départ de cette application est un ensemble dans un espace 5-D. Les quatre premières coordonnées sont l'espace de représentation des tronçons de route et la dernière et l'état de la chaussée (qui est représenté par un réel). L'ensemble est composé de toutes les valeurs des tronçons (position de tous les points des tronçons et largeur en ces points) et d'état de la chaussée. Le graphe de l'application métrique décrit comment obtenir la roulabilité en fonction des points dans cet ensemble.

4.1.6 La structure globale

La structure globale ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{S}(\mathcal{O})$ de l'objet physique $\mathcal{O}$ dans la représentation $\mathcal{R}$ est composée de l'ensemble des arbres d'objets avec les graphes de relation (c'est à dire l'ensemble des topologies) de tous les attributs de $\mathcal{O}$, de l'ensemble de toutes les métriques et de l'ensemble des graphes de connexions généralisées :

$${}^{\mathcal{R}}\mathcal{S}(\mathcal{O}) = \left(\bigcup_{\substack{k\in[0\,;N]\\ o\in\Delta_k^{\infty}(\mathcal{O})}} \mathrm{T}_k(o), \bigcup_{\substack{k\in[0\,;N]\\ o\in\Delta_k^{\infty}(\mathcal{O})}} \mathrm{M}_k(o), \bigcup_{k\in[0\,;N]} \mathrm{G}_{cg,k}\right) \tag{50}$$

4.2 Les relations inter-attributs

Réseau routier (10) : Quand on conduit un véhicule sur un réseau routier on doit anticiper(14). Il faut donc savoir ce qui vient après l'endroit où l'on se trouve sur le réseau. Pour cela, on peut exprimer les relations « est au nord de », « est au sud de », « est à l'est de » et « est à l'ouest de » entre les tronçons de route et les objets des différents attributs. Ainsi, si on connaît le lieu où on se trouve ainsi que la direction de déplacement, on peut savoir le trafic, la roulabilité ou l'état de la chaussée des prochains lieux que l'on va traverser.

On a déjà défini des relations intra-attributs. Il faut aussi définir des relations inter-attributs. Ce sont des relations entre des objets de l'espace de représentation des différents attributs. La relation est représentée par un graphe $\mathrm{G}_r(\Omega_i, \Omega_j)$ avec $i \neq j$. Pour un couple (i, j) donné, il peut y avoir plusieurs relations différentes. L'ensemble de ces relations est noté R_{ij}. Le graphe de ces relations est discret, comme pour celui des relations intra-attributs.

L'ensemble de tous les graphes exprimant toutes les relations inter-attributs pour toutes les paires d'attributs de l'objet $\mathcal{O}$ dans la représentation $\mathcal{R}$ est notée ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{G}(\mathcal{O})$:

$$ {}^{\mathcal{R}}\mathcal{G}(\mathcal{O}) = \bigcup_{\substack{i,j=0,N \\ i \neq j \\ r \in \mathrm{R}_{ij}}} \mathrm{G}_r(\Omega_i, \Omega_j). \tag{51} $$

Représentation (10.a) : Dans notre cas, l'attribut A_i est la géométrie et l'attribut A_j peut être le trafic, la roulabilité ou l'état de la chaussée.

4.3 Les correspondances entre différents attributs

Réseau routier (11) : Il faut, par exemple, que l'on soit capable de dire la valeur du trafic sur une route à un niveau grossier et en chaque point d'un tronçon de route à un niveau plus fin (voir Réseau routier (3) et (4)). Ceci est aussi valable pour l'état de la chaussée. Quand on connaît cet état, il faut savoir quelle est la roulabilité (en fonction de la largeur et de la courbure de la route). Il faut donc mettre en correspondance les points des routes avec des valeurs de trafic et des états de la chaussée ainsi que les états de la chaussée avec des valeurs de roulabilité. Ces correspondances sont définies de cette manière mais ce n'est qu'une exemplification qui n'est pas universelle.

4.3.1 Les correspondances générales

On cherche à mettre en correspondance des valeurs, des objets-attributs ou même des applications métriques d'attributs différents. Mettre en correspondance peut vouloir dire « Telle valeur de tel attribut correspond à telle valeur de tel autre attribut », « Tel objet-attribut de tel attribut a telle valeur de tel autre attribut », etc. Le tableau 1 montre les différents types de correspondances que j'inclus dans mon modèle(15). $\mathrm{C}_{t,ij}$ est la correspondance de type t entre l'attribut A_i et l'attribut A_j :

$$ \mathrm{C}_{t,ij} = (\mathrm{G}_t, D_{t,ij}, A_{t,ij}). \tag{52} $$

(14)Non, ceci n'est pas un manuel de conduite !

(15)Le graphe de la correspondance exprime la relation "est en correspondance avec". Donc, quand les ensembles de départ et d'arrivée sont constitués d'objets, alors la correspondance est un cas particulier de relation inter-attributs (voir la section 4.2). C'est pourquoi ce type n'est pas traité ici.

Tableau 1 : Les différents types de correspondance

Attribut A_i	Correspondance	Attribut A_j	Type
objet	$1 \rightarrow 1$ $n \leftarrow 1$	valeur	I II
objet	$1 \rightarrow 1$	application	III
valeur	$1 \rightarrow 1$ $n \leftarrow 1$	valeur	IV V

L'ensemble des correspondances de l'objet $\mathcal{O}$ dans la représentation $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$ {}^{\mathcal{R}}\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \bigcup_{\substack{i,j=0,N \\ t=\mathrm{I},\mathrm{V}}} \mathrm{C}_{t,ij}. \tag{53} $$

4.3.2 Les correspondances entre l'attribut géométrique et les autres attributs

Il est intéressant de souligner des correspondances un peu particulières : celles entre l'attribut géométrique et les attributs non géométriques. Les entités de départ et d'arrivée des différents types de correspondance sont montrées dans le tableau 2 pour ces correspondances. J'appelle

Tableau 2 : Les différents types de correspondance entre un attribut géométrique et un attribut non géométrique

Type	Attr. géométrique	Correspondance	Attr. non géométrique
I II	objet physique	$1 \rightarrow 1$ $n \leftarrow 1$	valeur
III	objet physique	$1 \rightarrow 1$	application
IV V	point physique	$1 \rightarrow 1$ $n \leftarrow 1$	valeur

$\mathrm{C}_{t,i}$ la correspondance de type t entre l'attribut géométrique et l'attribut A_i $(i \neq 0)$:

$$ \mathrm{C}_{t,i} = (\mathrm{G}_t, D_{t,i}, A_{t,i}). \tag{54} $$

On notera V_k l'ensemble des valeurs prises par l'attribut A_k :

$$ \mathrm{V}_k = \bigcup_{\substack{a \in \Delta_k(\mathcal{A}) \\ \mathcal{A} \in \tilde{\Omega}_k}} \mathrm{pr}_2 \mathrm{m}_k(a) \tag{55} $$

où $\tilde{\Omega}_k$ est le sous-ensemble de Ω_k qui contient tous les objets pour lesquels on a une métrique (donc un ensemble d'applications métriques).

Explicitons maintenant les différents types de correspondance.

Correspondance d'un objet physique vers une valeur d'attribut non géométrique (type I). Ce type de correspondance donne la valeur d'un attribut non géométrique d'un objet physique. Par exemple, la correspondance dit qu'un objet est rouge tandis qu'un autre est bleu. Chaque objet a au plus une valeur d'un attribut. L'ensemble de départ est l'ensemble des objets. L'ensemble d'arrivée est l'ensemble des valeurs prises par l'attribut. D'où :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{I},i} = (\mathrm{G}_{\mathrm{I}}, \Omega_0, \mathrm{V}_i)\,. \tag{56}$$

Correspondance d'une valeur d'attribut non géométrique vers des objets physiques (type II). Ce type de correspondance indique quels sont les objets physiques qui ont une valeur donnée d'un attribut non géométrique. Par exemple, une de ces correspondances dit quels sont les objets rouges. L'ensemble de départ est donc l'ensemble des valeurs prises par l'attribut tandis que l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des objets physiques. On a donc la correspondance :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{II},i} = (\mathrm{G}_{\mathrm{II}}, \mathrm{V}_i, \Omega_0)\,. \tag{57}$$

Correspondance d'un objet physique vers une application métrique d'attribut non géométrique (type III). Ce type de correspondance est similaire au type I mais donne l'application métrique et non la valeur. Par exemple, la correspondance indique qu'un objet a telle fonction de rouge et qu'un autre a telle fonction de bleu. À un objet est associé une application métrique et une seule pour un attribut donné. L'ensemble de départ est toujours l'ensemble des objets physique mais l'ensemble d'arrivée est l'ensemble de toutes les applications métriques de l'attribut :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{III},i} = \left(\mathrm{G}_{\mathrm{III}}, \Omega_0, \bigcup_{\mathcal{A}\in\tilde{\Omega}_i} \mathrm{M}_i(\mathcal{A})\right). \tag{58}$$

Correspondance d'un point physique vers une valeur d'attribut non géométrique (type IV). Avec ce type de correspondance, on s'intéresse non plus aux objets physiques mais aux points de ceux-ci. Ce type donne la valeur d'un attribut non géométrique aux points d'un objet physique. Par exemple, la correspondance dit qu'un point d'un objet a une valeur de rouge, qu'un autre point du même objet est bleu et qu'un point d'un autre objet a une autre valeur de rouge. Un point physique a une valeur et une seule d'un attribut donné. L'ensemble de départ est donc l'ensemble des points physiques, c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par les applications métriques géométriques. L'ensemble d'arrivée est l'ensemble des valeurs prises par l'attribut. D'où la correspondance :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{IV},i} = (\mathrm{G}_{\mathrm{IV}}, \mathrm{V}_0, \mathrm{V}_i)\,. \tag{59}$$

Correspondance d'une valeur d'attribut non géométrique vers des points physiques (type V). Ce type est le même que le type II sauf qu'il indique des points physiques et non des objets. L'ensemble d'arrivée devient donc l'ensemble des points physiques :

$$\mathrm{C}_{\mathrm{V},i} = (\mathrm{G}_{\mathrm{V}}, \mathrm{V}_i, \mathrm{V}_0)\,. \tag{60}$$

5 La construction d'une représentation

Maintenant que le modèle a été décrit, nous allons parler de la construction d'une instance de ce modèle et allons voir comment celle-ci peut dépendre de la tâche à exécuter avec l'objet et de l'agent exécutant cette tâche. Nous allons voir que la construction dépend aussi du constructeur.

On va voir que l'on peut passer d'une représentation déjà construite à une autre représentation, ce qui sera très utile quand le constructeur n'est pas l'agent qui va utiliser la représentation pour exécuter sa tâche ou que l'agent ou la tâche change. Ce changement de représentation a un coût minimal car toute l'information contenue dans la première représentation peut être utilisée pour construire la seconde.

5.1 Différentes représentations d'un même objet

Réseau routier (12) : La représentation de notre réseau routier dépend de l'agent et de la tâche qu'il doit accomplir avec la représentation.

Par exemple, si l'agent est un véhicule capable de rouler aussi vite que l'on veut quelque soit l'état de la chaussée et la courbure de la route et que la tâche est de rouler le plus vite possible tout en respectant les limites de vitesse (on suppose que le trafic est nul), alors la décomposition des routes en tronçons pourra se faire suivant cette limite de vitesse (comme dans Réseau routier (4)).

Par contre, si on est un gros camion lourd et large qui ne peut pas emprunter n'importe quel tronçon de route (à cause de son poids et de sa largeur), alors une décomposition du réseau en routes et en intersections empruntables et non empruntables sera plus appropriée. Ensuite, chaque route empruntable sera décomposée en fonction de la roulabilité (qui est maintenant le facteur limitant de la vitesse) et non plus des limites de vitesse.

Maintenant que le modèle a été décrit, parlons un peu des représentations possibles d'un objet donné, c'est à dire d'instances du modèle. Bien entendu, pour un objet physique donné, il n'y a pas *une* représentation. En effet, celle-ci dépend non seulement de la tâche à exécuter avec cet objet, mais aussi de l'agent qui va exécuter la tâche.

5.2 La construction des représentations

Mais qu'en est-il de la construction d'une représentation particulière d'un objet ?

Réseau routier (13) : Comment va-t-on construire une représentation particulière de notre réseau routier ? Cela dépend de qui construit la représentation.

Par exemple, si la construction est faite à partir d'un avion (ce qui est le cas en cartographie aérienne), on va d'abord avoir une vision grossière du réseau quand on sera loin de celui-ci en altitude. À cette distance, on sera capable d'extraire les routes et les intersections. Les routes ne seront visibles que comme des traits tandis que les intersections ne seront que des points. Ensuite, plus on va se rapprocher, plus on va voir de détails sur les routes du réseau. On sera donc capable de décomposer les routes en tronçons de route. On a donc une construction du haut vers le bas dans l'arbre des objets.

Par contre, si on est à bord d'une voiture qui roule sur le réseau routier, la construction va se faire du bas vers le haut dans l'arbre des objets. En effet, on va d'abord voir les tronçons de route et les intersections. On pourra ensuite regrouper les tronçons pour en faire des routes. De même, on verra le trafic de voitures en chaque point des tronçons de route. On pourra ensuite déduire un trafic moyen, par exemple, sur les routes.

Dépendant de qui construit la représentation d'un objet, celle-ci ne sera pas toujours la même. Notamment, il y a deux directions de construction : du bas vers le haut ou du haut vers le bas dans l'arbre des objets-attributs suivant qu'on a un aperçu d'abord local ou global de l'objet. D'autre part, dans un sens donné, deux constructeurs ne percevront pas les détails de la même manière et fourniront donc des représentations différentes.

Réseau routier (14) : Pour quantifier le trafic de voitures, on peut faire des statistiques sur la densité de voitures et la vitesse de celles-ci en tout point du réseau et à toute heure de la journée. Ces statistiques vont conduire, par exemple, à des valeurs moyennes de densité et de vitesse ainsi qu'à une matrice de covariance pour ces deux valeurs. Les trois valeurs de cette matrice devront être inclues dans la représentation du trafic.

Pour construire une représentation, il faut acquérir des mesures des différents attributs de l'objet sur celui-ci. Or, en général, ces mesures sont bruitées ou proviennent de statistiques. L'application métrique de l'objet-attribut de l'attribut que l'on caractérise devra donc tenir compte de l'incertitude des mesures. Par exemple, si la distribution de probabilité du bruit est normale, l'application métrique donnera la moyenne et la variance de la valeur prise par l'attribut.

Il existe dans la littérature une description assez détaillée et complète des différentes techniques de fusion sensorielles. Par exemple, quand on a un modèle probabiliste gaussien du bruit, le filtre de Kalman ([CC91]) permet d'estimer la valeur d'un paramètre quand on en a une succession de mesures bruitées. Un certain nombre d'outils pour propager l'incertitude, combiner deux mesures (en se basant sur la théorie du filtre de Kalman) et décider si deux mesures représentent la même valeur (en utilisant la distance de Mahalanobis) sont décrits dans [CR87, SC86]. Ces outils s'appliquent à un modèle probabiliste de l'incertitude représenté par sa moyenne et sa matrice de covariance. Plutôt que d'avoir une distribution de probabilité, on peut avoir une distribution de possibilité (dont l'intégrale sur toutes les valeurs possibles n'est pas égale à 1). [FP86] en utilise une qui est trapézoïdale, c'est à dire que la possibilité passe linéairement de 0 à 1 puis de 1 à 0. On peut aussi définir une combinaison de mesures avec ce type de distribution. L'incertitude peut aussi être représentée avec une forme géométrique (par exemple un cercle contenant les positions possibles d'un robot) ([AH93, ST94]). Dans ce cas, la combinaison de deux mesure se fait en prenant l'intersection des deux formes géométriques correspondantes. Un problème se pose ici car en général, l'intersection de deux formes n'est pas une forme de même nature. Un autre inconvénient de ce modèle est que sa signification n'est pas claire. À quoi correspond la forme de l'incertitude. Est-ce qu'elle veut dire que la valeur est certainement à l'intérieur (ce qui n'est pas très réaliste) ou qu'elle est à l'intérieur avec une certaine probabilité ? Et dans ce cas, pourquoi telle probabilité plutôt qu'une autre ?

Durrant-Whyte ([DW89]) introduit la notion de topologie stochastique. C'est un graphe de relations entre des objets dont la caractérisation est probabiliste. Il décrit comment propager l'incertitude de la caractérisation d'un objet sur celle d'un autre.

Pour pouvoir utiliser l'incertitude des mesures, il faut avoir un modèle du senseur utilisé. On trouvera par exemple un modèle d'incertitude d'un système stéréographique dans [KTB89]. Un modèle probabiliste d'un sonar donnant la probabilité qu'une zone est occupée ou libre est donné dans [ME88]. Un autre modèle basé sur la simulation des réflections et diffractions du rayon émis par le sonar est introduit dans [DJMW93].

5.3 Changement de représentation

Réseau routier (15) : Imaginons que la représentation du réseau routier ait été faites par cartographie aérienne (voir Réseau routier (13)) et que l'on veut l'utiliser pour notre véhicule rapide tout-terrain de Réseau routier (12). Il est assez clair que la représentation ne convient pas à l'utilisation que l'on veut en faire. En effet, même si les limitations de vitesse ont été introduites dans la représentation (par un moyen quelconque), la décomposition des routes en tronçons n'a pas pu être faites à partir de ces limitations (qui ne sont pas visibles de l'avion) mais plutôt en fonction de critères par exemple géométriques. Il faut donc resegmenter les routes en nouveaux tronçons en fonction de ce nouveau critère.

Si, ensuite, l'agent change et devient le gros camion de Réseau routier (13), à nouveau la représentation ne conviendra plus. Il faudra donc faire un nouveau changement de représentation.

Il se peut que la représentation que l'on a ne convienne pas à l'utilisation que l'on veut en faire. Il faut donc avoir un moyen de passer d'une représentation à une autre. Ceci peut ce faire dans deux sens dans l'arbre des objets-attributs : on recompose des sous-objets pour en faire des objets de plus haut niveau et/ou on décompose les objets en sous-objets suivant un autre critère. La nouvelle représentation obtenue est une autre instance du modèle. On voit que pour passer de l'une à l'autre, il n'est pas nécessaire de refaire une étape complète d'acquisition de données, ce qui est un travail coûteux(16).

6 Conclusion

Nous avons présenté un modèle mathématique d'objet qui est indépendant de la tâche à accomplir avec l'objet ou de l'agent qui exécute la tâche. Cette indépendance permet de passer d'une représentation à une autre d'un même objet si la tâche ou l'agent change. Aucune supposition n'est faite sur les objets à représenter (à part qu'ils soient représentables) et aucune primitive de représentation (comme des cylindres généralisés) n'est choisie. D'ailleurs, différentes primitives peuvent cohabiter dans le modèle.

Dans ce modèle, les objets sont représentés par un ensemble d'attributs, dont la géométrie. La représentation de chaque attribut est à plusieurs niveaux et est indépendante des autres attributs. Le modèle contient de plus un ensemble de relations et de correspondances entre les différents attributs, chacune étant représentée par un graphe.

(16)Si on a besoin d'un nouvel attribut dans la nouvelle représentation, il faudra, peut-être passer par une étape d'acquisition de données, mais toute l'information déjà présentes dans l'ancienne représentation peut être réutilisée.

Références

[AH93] Sami Atiya et Gregory D. Hager. Real-time vision-based robot localization. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(6):785–800, 1993.

[All88] Peter K. Allen. Integrating vision and touch for object recognition tasks. *International Journal of Robotics Research*, 7(6):15–33, 1988.

[BCK+89] Michele Barry, David Cyrluk, Deepak Kapur, Joseph Mundy et Van-Duc Nguyen. A multi-level geometric reasoning system for vision. Dans Deepak Kapur et Joseph L. Mundy, éditeurs, *Geometric Reasoning*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[Bro83] Rodney A. Brooks. Model-based three-dimensional interpretations of two-dimesional images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-5(2):140–149, 1983.

[CC91] Charles K. Chui et Guanrong Chen. *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. Springer Verlag, 1991.

[CL85] Raja Chatila et Jean-Paul Laumond. Position referencing and consistent world modeling for mobile robots. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 138–145, 1985.

[CR87] James L. Crowley et Fano Ramparany. Mathematical tools for representing uncertainty in perception. Dans *Proceedings of the 1987 Workshop on Spatial Reasoning and Multi-sensor Fusion*, pages 293–302, 1987.

[DJMW93] Gregory Dudek, Michael Jenkin, Evangelos Milios et David Wilkes. Reflections on modelling a sonar range sensor. Rapport technique CIM-92-9, McGill Research Centre for Intelligent Machines, McGill University, Montréal, Québec, Canada, décembre 1993.

[DW89] Hugh F. Durrant-Whyte. Uncertain geometry. Dans Deepak Kapur et Joseph L. Mundy, éditeurs, *Geometric Reasoning*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[Elf87] Alberto Elfes. Sonar-based real-world mapping and navigation. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3(3):249–265, 1987.

[FP86] Henri Farreny et Henri Prade. Tackling uncertainty and imprecision in robotics. Dans O. Faugeras et G. Giralt, éditeurs, *Robotics Research 3*, pages 85–91. The MIT Press, Cambridge, MA, 1986. (Proceedings of the Third International Symposium on Robotics Research, Gouvieux, France, 1985).

[HA92] Yong K. Hwang et Narendra Ahuja. Gross motion planning—a survey. *ACM Computing Surveys*, 24(3), 1992.

[KB87] Benjamin J. Kuipers et Y.T. Byun. A qualitative approach to robot exploration and map-learning. Dans *Proceedings of the 1987 Workshop on Spatial Reasoning and Multi-sensor Fusion*, pages 390–404, 1987.

[KK92] Akio Kosaka et Avinash C. Kak. Fast vision-guided mobile robot navigation using model-based reasoning and prediction of uncertainties. *CVGIP: Image Understanding*, 56(3):271–329, 1992.

[KTB89] David J. Kriegman, Ernst Triendl et Thomas O. Binford. Stereo vision and navigation in buildings for mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(6):792–803, 1989.

[LCF+94] Simon Lacroix, Raja Chatila, Sara Fleury, Matthieu Herrb et Thierry Siméon. Autonomous navigation in outdoor environment: Adaptive approach and experiment. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 426–432, 1994.

[Mar82] David Marr. *Vision*. W. H. Freeman and Company, 1982.

[MD94] Paul MacKenzie et Gregory Dudek. Precise positioning using model-based maps. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1615–1621, 1994.

[ME88] Larry Matthies et Alberto Elfes. Integration of sonar and stereo range data using a grid-based representation. Dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 727–733, 1988.

[Mit89] Joseph S.B. Mitchell. An algorithmic approach to some problems in terrain navigation. Dans Deepak Kapur et Joseph L. Mundy, éditeurs, *Geometric Reasoning*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[Pen90] Alex P. Pentland. Automatic extraction of deformable part models. *International Journal of Computer Vision*, 4(2):107–126, 1990.

[SC86] Randall C. Smith et Peter Cheeseman. On the representation and estimation of spatial uncertainty. *International Journal of Robotics Research*, 5(4):56–68, 1986.

[ST94] Karen T. Sutherland et William B. Thompson. Localizing in unstructured environments: Dealing with the errors. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(6):740–754, 1994.

[WF91] Peter Whaite et Frank P. Ferrie. From uncertainty to visual exploration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(10):1038–1049, 1991.

[WH89] Ellen Lowenfeld Walker et Martin Herman. Geometric reasoning for constructing 3D scene descriptions from images. Dans Deepak Kapur et Joseph L. Mundy, éditeurs, *Geometric Reasoning*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1989.