Datrysiadau 4

1. *Trwy ystyried yr integryn egni*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

profwch fod gan y broblem hafaliad gwres isod ddatrysiad unigryw.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l,\ 0 \le t < T, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \phi(t), \quad u(l,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Datrysiad. Cymerwch, er mwyn cael gwrthddywediad, fod dau ddatrysiad gwahanol, u_1 ac u_2, dyweder. Mae eu gwahaniaeth, $u = u_1 - u_2$, yn bodloni'r broblem

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l,\ 0 \le t < T, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Rydym yn cyfrifo $\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}$ trwy integru fesul rhan:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int_0^l 2uu_t\mathrm{d}x = c^2\int_0^l uu_{xx}\mathrm{d}x &= -c^2\left(\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x - u(x,t)u_x(l,t)\big|_0^l\right). \\ &= -c^2\int_0^l u_x^2\mathrm{d}x \le 0. \end{aligned}$$

Felly mae $E(t)$ yn lleihaol. Ymhellach, rydym yn nodi fod $E(t) \ge 0$ ar gyfer pob t, ac mae $E(0) = 0$. Felly, mae $E(t) = 0$ ar gyfer pob $t \ge 0$, sy'n ymhlygu bod $u = 0$, hynny yw $u_1 = u_2$. Mae hyn yn gwrthddweud ein gosodiad cychwynnol fod u_1 ac u_2 yn ddatrysiadau gwahanol. Felly mae'r prawf wedi'i gwblhau.

2. *Defnyddiwch yr egwyddor macsimwm ar gyfer yr hafaliad gwres* $u_t = c^2 u_{xx}$ *ar y petryal* $R := [0,l] \times [0,T]$*, er mwyn profi'r* egwyddor minimwm*: mae datrysiad yr hafaliad gwres ar* R *yn cyrraedd ei finimwm ar y ffin barabolig* $\Pi = ([0,l] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{l\} \times [0,T])$.

NB: Nid oes angen ail-brofi'r egwyddor macsimwm.

Datrysiad. Gadewch i $v = -u$. Felly mae v yn bodloni'r hafaliad gwres (gan fod $v_t - c^2 v_{xx} = -u_t + c^2 u_{xx} = 0$) ac felly mae'n bodloni'r egwyddor macsimwm; hynny yw, mae v yn cyrraedd ei werth mwyaf ar y ffin barabolig Π. Rydym yn diddwytho fod u yn cyrraedd ei werth minimol ar Π.

3. *Cymerwch fod u yn bodloni'r hafaliad gwres $u_t = u_{xx}$ ar y parth $R = [0,1] \times [0,100]$ gyda'r amodau cychwynnol a'r amodau ffin canlynol*

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = te^{-t}, \quad u(1,t) = 0, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Darganfyddwch gysonion m, M fel bod $m \le u(x,t) \le M$ ar gyfer pob $(x,t) \in R$.

Datrysiad. Rydym yn gwybod fod u yn bodloni'r hafaliad gwres, felly mae'n rhaid iddo gyrraedd ei werth mwyaf ar hyd y ffin barabolig. Yn debyg, mae'n cyraedd ei werth lleiaf ar y ffin barabolig (gweler y cwestiwn blaenorol). Mae felly'n ddigon i gyfrifo macsimwm te^{-t}, sef e^{-1} a gyrhaeddir yn $t = 1$. Felly $0 \le u(x,t) \le e^{-1}$.

4. *Cyfrifwch drawsffurf Fourier $e^{-a|x|}$, lle mae $a \in \mathbb{R}$ yn gysonyn.*

Datrysiad.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{i\xi x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|+i\xi x} \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a+i\xi)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{(i\xi - a)x} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{e^{(a+i\xi)x}}{a+i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(i\xi-a)x}}{i\xi - a} \right]_{0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\xi} - \frac{1}{i\xi - a} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2} \end{aligned}$$

5. *Rhoddir trawsffurf Fourier rhyw ffwythiant $f \in L^1(\mathbb{R})$ gan $\bar{f}(\xi) = c^{-\xi^2/8}$.*

   (a) Beth yw trawsffurf Fourier f' (h.y. trawsffurf deilliad f)?

   (b) Defnyddiwch theorem gwrthdroad Fourier i ddarganfod $f(x)$.

   (c) Trwy ddefnyddio'ch atebion i (a) a (b), ynghyad ag unrhyw theoremau neu priodweddau yr ydych yn gwybod sy'n perthnasol i drawsffurf Fourier, diddwythwch y ffwythiant g sydd â thrawsffurf Fourier a roddir gan

$$\bar{g}(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2/4}.$$

   Rhowch eich ateb terfynol ar ffurf gaeedig (h.y. ddim fel integryn) yn echblyg.

Datrysiad.

(a) Trwy ddefnyddio y theorem deilliad gwelwn fod, $\mathcal{F}\{f'\} = -i\xi \mathcal{F}\{f\} = -i\xi e^{-\xi^2/8}$.

(b) Gan nodi fod $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R})$, mae theorem gwrthdroad Fourier yn ymhlygu

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/8} e^{-i\xi x} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}(\xi^2 + 8i\xi x)} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}(\xi + 4ix)^2} e^{-2x^2} \mathrm{d}\xi = \frac{e^{-2x^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}(\xi+4ix)^2} \mathrm{d}\xi = \frac{e^{-2x^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{8}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2\sqrt{2} e^{-2x^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}, \text{ gan fod } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Rydym wedi defnyddio'r amnewidau $y = \xi + 4ix$ a $z = \frac{\sqrt{2}y}{4}$.

(c) Nodwch fod $\bar{g}(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2/4} = 2i(e^{-\xi^2/8})(-i\xi e^{-\xi^2/8}) = 2i\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{f'\} = 2i\mathcal{F}\{f * f'\}$ yn ôl y theorem ffaltwng. Dewiswch x. Yna mae:

$$
\begin{aligned}
g(x) = 2i(f * f')(x) &= 2i\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f'(y)\mathrm{d}y \text{ (trwy ddiffiniad y ffaltwng)} \\
&= 2i\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(x-y)^2}\right)\left(-4y\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{16i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-2x^2+4xy-4y^2}\mathrm{d}y = -\frac{16ie^{-2x^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-4(y^2-xy)}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{16ie^{-x^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-4(y-x/2)^2}\mathrm{d}y = -\frac{16ie^{-x^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(z+\frac{x}{2}\right)e^{-4z^2}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{16ie^{-x^2}}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-4z^2}\mathrm{d}z + \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2}\mathrm{d}z\right\} \\
&= -\frac{16ixe^{-x^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4z^2}\mathrm{d}z = -\frac{16ixe^{-x^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{2} = -\frac{4i}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}.
\end{aligned}
$$

6. *(a) Gadewch i $f \in L^1(\mathbb{R})$ fod yn ffwythiant â gwerth real. Dangoswch fod ei drawsffurf Fourier, $\bar{f}$, yn bodloni*

$$\bar{f}^*(\xi) = \bar{f}(-\xi),$$

lle mae $\bar{f}^*$ yn dynodi cyfiau cymhlyg $\bar{f}$ (dyma'r briodwedd cymesuredd Hermitiaidd).

(b) Diddwythwch berthynas debyg rhwng trawsffurf ffwythiant dychmygol pur g â'i gyfiau cymhlyg.

(c) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o eil-ffwythiant real hefyd yn real.

(d) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o od-ffwythiant yn ddychmygol.

(e) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o eil-ffwythiant hefyd yn eil-ffwythiant.

Datrysiad.

(a) Noder fod

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^*(\xi) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\xi x) + i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x\right)^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\xi x) - i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x. = \bar{f}(-\xi)
\end{aligned}
$$

(b) Ar gyfer ffwythiant real, h, a ddiffinir gan $g(x) = ih(x)$, mae

$$\bar{g}^*(\xi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} ih(x)[\cos(\xi x) + i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x\right)^*$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} -ih(x)\cos(\xi x) - ih(x)\sin(\xi x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} -g(x)[\cos(\xi x) - i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} -g(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x = -\bar{g}(-\xi).$$

(c) Gadewch i f fod yn eil-ffwythiant real. Felly

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\xi x) + i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\xi x)\mathrm{d}x,$$

sy'n amlwg yn real.

(d) Gadewch i f fod yn od-ffwythiant real. Felly

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\xi x) + i\sin(\xi x)]\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} if(x)\sin(\xi x)\mathrm{d}x,$$

sy'n amlwg yn ddychmygol.

(e) Gadewch i f fod yn eil-ffwythiant. Felly

$$\bar{f}(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi(-x)}\mathrm{d}x.$$

Gwnewch yr amnewidiad $y = -x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi(-x)}\mathrm{d}x = -\int_{\infty}^{-\infty} f(-y)e^{i\xi y}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{i\xi y}\mathrm{d}y,$$

a gan fod f yn eil-ffwythiant, mae gennym fod

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{i\xi y}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\xi y}\mathrm{d}y = \bar{f}(\xi).$$

Hynny yw, mae trawsffurf Fourier eil-ffwythiant hefyd yn eil-ffwythiant.

7. *Darganfyddwch, mewn perthynas ag x, drawsffurf Fourier y datrysiad i'r broblem gwerth ffin ar gyfer hafaliad Laplace isod:*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]; \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}; \\ u(x,1) = e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Datrysiad. Diffiniwch $\bar{u}(\xi, y)$ fel trawsffurf Fourier u mewn perthynas ag x. Hynny yw:

$$\mathcal{F}\{u\} = \bar{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{i\xi x}\mathrm{d}x.$$

Yna mae y theorem deilliad yn rhoi

$$\mathcal{F}\{u_{xx}\} = (-i\xi)(-i\xi)\mathcal{F}\{u\} = -\xi^2\bar{u},$$

ac mae

$$\mathcal{F}\{u_{yy}\} = \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}$$

(gan gymerwn y trawsffurfiau Fourier mewn perthynas ag x, nid y yma). Felly, mae gweithredu'r trawsffurfiau Fourier ar yr hafaliad differol rhannol (hafaliad Laplace) yn ildio

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} - \xi^2\bar{u} = 0.$$

Gan ddifferwn mewn perthynas ag un newidyn annibynnol, gallwn ddatrys yr hafaliad yn yr un modd â hafaliad differol cyffredin. Yr hafaliad ategol yw $m^2 - \xi^2 = 0$, felly

$$\bar{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{|\xi|y} + B(\xi)e^{-|\xi|y}.$$

Defnyddiwn yr amodau ffin i ddarganfod y ffwythiannau A a B. Gan gymeryd trawsffurfiau Fourier mewn perthynas ag x o'r amodau ffin gwelwn fod

$$\begin{cases} u(\xi, 0) = 0, & \xi \in \mathbb{R}; \\ u(\xi, 1) = \frac{2}{1+\xi^2}, & \xi \in \mathbb{R} \text{ (gweler Q1 gydag } a = 1). \end{cases}$$

Mae'r amod gyntaf yn ildio $A(\xi) = -B(\xi)$. Felly mae'r ail amod yn ildio

$$\frac{2}{1+\xi^2} = A(\xi)\left(e^{|\xi|} - e^{-|\xi|}\right) = 2A(\xi)\sinh(|\xi|).$$

Felly mae $A(\xi) = \frac{\operatorname{csch}(|\xi|)}{1+\xi^2}$ ac felly mae $B(\xi) = -\frac{\operatorname{csch}(|\xi|)}{1+\xi^2}$. Yn olaf, felly, rhoddir trawsffurf Fourier u mewn perthynas ag x gan

$$\bar{u}(\xi, y) = \frac{\operatorname{csch}(|\xi|)}{1+\xi^2}\left(e^{|\xi|y} - e^{-|\xi|y}\right) = \frac{2\operatorname{csch}(|\xi|)\sinh(|\xi|y)}{1+\xi^2}.$$

8. *(Anoddach) Profwch nad yw'r ffwythiant*

$$f(x) = \frac{2\sin(x/2)}{x}$$

yn perthyn i $L^1(\mathbb{R})$.

Datrysiad Gadewch i $f(x) = \frac{2\sin(x/2)}{x}$. Noder fod yr integrand yma yn annegyddol, felly mae'n ddigonol i ddangos nad yw $\int_0^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ yn cydgyfeirio. Ystyriwch y cyfyngau

$$I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi], \quad k = 0, \ldots, n,$$

a diffiniwch f_k fel cyfyngiad f i'r cyfwng I_k. Felly, ar bob cyfwng I_k, mae f_k yn ffwythiant di-dor, integradwy, sy'n bodloni $|f(x)| \geq \frac{|\sin\frac{x}{2}|}{(k+1)\pi}$. Felly, mae

$$\int\limits_{0}^{(n+1)\pi} |f(x)| \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{2|\sin(x/2)|}{x} \mathrm{d}x \geq \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin(x/2)|}{(k+1)\pi} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(k+1)\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{m}$$

ar gyfer $n \in \mathbb{N}$. Gadewch i $n \to \infty$ a chofiwch fod y gyfres $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ yn ddargyfeiriol. Felly, rydym yn diddwytho fod $f \notin L^1(\mathbb{R})$.