Datrysiadau 3

2024–25

1. Gan ddefnyddio'r dull adlewyrchiad a fformiwla d'Alembert, datryswch broblem Cauchy ar gyfer yr hafaliad ton ar gyfer llinyn hanner-anfeidraidd

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = x^2 e^{-x}, & u_t(x,0) = xe^{-x}, \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

Datrysiad. Defnyddiwn yr egwyddor adlewyrchiad od. Diffiniwch $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ ac $\tilde{u}$ fel

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x}, & x \geq 0 \\ -x^2 e^{x}. & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ xe^{x}. & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq 0 \\ -u(-x). & x < 0 \end{cases}$$

Yna mae $\tilde{u}$ yn bodloni'r broblem Cauchy wedi'i diffinio ar gyfer yr holl linell

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - 9\tilde{u}_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x), & \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x), \end{cases}$$

ac, oherwydd yr adlewyrchiad od, mae'n bodloni $u(0,t) = 0$ ar gyfer pob $t > 0$. Yn ôl fformiwla d'Alembert, mae hwn â'r datrysiad:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\{\tilde{f}(x+3t) + \tilde{f}(x-3t)\} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \tilde{g}(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

Ystyriwch yr achosion $0 < x < 3t$ ac $x > 3t$ arwahan fel yn eich darlithoedd, rhoddir y datrysiad gan

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{(x+3t)^2 e^{-x-3t} + (x-3t)^2 e^{3t-x}\right\} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \lambda e^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda, & x > 3t \\ \frac{1}{2}\left\{(x+3t)^2 e^{-x-3t} - (x-3t)^2 e^{x-3t}\right\} + \frac{1}{6}\int_{3t-x}^{x+3t} \lambda e^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda, & 0 < x < 3t, \end{cases}$$

sef

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{(x+3t)^2 e^{-x-3t} + (x-3t)^2 e^{3t-x}\right\} - \frac{1}{6}\left((1+x+3t)e^{-x-3t} - (1+x-3t)e^{-x+3t}\right), & x > 3t \\ \frac{1}{2}\left\{(x+3t)^2 e^{-x-3t} - (x-3t)^2 e^{x-3t}\right\} - \frac{1}{6}\left((1+x+3t)e^{-x-3t} - (1+3t-x)e^{x-3t}\right), & 0 < x < 3t. \end{cases}$$

2. Darganfyddwch ddatrysiad yr hafaliad ton anhomogenaidd

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x\cos t, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Datrysiad. Mae egwyddor Duhamel yn rhoi'r datrysiad

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} y\cos\tau \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau = x(1-\cos t).$$

3. Gadewch i $l > 0$ a $m, n \in \mathbb{Z}$. Profwch fod

$$\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Datrysiad: Defnyddiwn y mynegiad trigonometreg

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

sy'n rhoi

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x.$$

Yn gyntaf, mae

$$\begin{aligned}\int_0^l \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x &= \frac{l}{(n+m)\pi}\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{l}{(n+m)\pi}[\sin((n+m)\pi) - \sin(0)] = 0.\end{aligned}$$

Yn yr un modd, mae

$$\begin{aligned}\int_0^l \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x &= \frac{l}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{l}{(n-m)\pi}[\sin((n-m)\pi) - \sin(0)] = 0,\end{aligned}$$

ar gyfer $n \neq m$. Ond ar gyfer $n = m$, mae

$$\int_0^l \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \int_0^l \cos(0)\mathrm{d}x = \int_0^l \mathrm{d}x = l.$$

Felly mae gennym

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x = 0,$$

ar gyfer $n \neq m$, ac

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

ar gyfer $n = m$.

4. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn datrys y broblem gwerth ffin cychwynnol

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, \pi],\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 3x, \quad u_t(x,0) = 0, \text{ amodau cychwynnol.} \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,\ t > 0 \text{ amodau ffin.} \end{cases}$$

(Gallwch ddefnyddio'r fformiwlâu a ddeillwyd mewn darlithoedd os ydych am gyfyngu eich datrysiadau i beidio bod yn rhy hir, ond gwnewch yn siwr eich bod yn deall y deilliad hwnnw.)

Datrysiad: Rhoddir y datrysiad gan

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

(gweler y nodiadau darlith ar gyfer ei ddeilliad); yn yr achos hwn, mae $l = \pi$ ac felly mae'r datrysiad yn lleihau i

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kct) + B_k \sin(kct)) \sin(kx),$$

Mae'r amod $u_t(x,0) = 0$ yn awgrymu fod $B_k = 0$ ar gyfer pob k. Mae'r amod $u(x,0) = \sin(3x)$ yn awgrymu fod $A_3 = 1$, ac $A_k = 0$ ar gyfer pob $k \neq 3$. Felly'r datrysiad sydd ei angen yw

$$u(x,t) = \cos(3ct)\sin(3x).$$

5. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn darganfod y datrysiad cyffredinol i'r broblem gwerth ffin cychwynnol ar gyfer y hafaliad gwres dimensiwn un gyda phwyntiau terfyn ar dymeredd sero.

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, l],\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Datrysiad: Tybiwch fod y datrysiad yn wahanadwy, h.y. canfyddwch u ar ffurf $u(x,t) = X(x)T(t)$. Mae amnewid y ffurf yma i fewn i'r hafaliad gwres yn rhoi

$$(X(x)T(t))_t - c^2(X(x)T(t))_{xx} = 0 \Rightarrow X(x)T'(t) - c^2 T(t)X''(x) = 0.$$

Mae ad-drefnu yn rhoi

$$\frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \text{ dyweder,}$$

lle mae $-\lambda$ yn gyson gan fod y ddwy ochr o'r hafaliad gynt yn ffwythiannau o'r newidynnau annibynnol t a x, yn ôl eu trefn, yn unig. Mae'r amodau ffin yn ymhlgu bod $X(0) = 0$ a $X(l) = 0$. Felly, gallwn ystyried y broblem ar gyfer $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Mae hwn yr union yr un fath broblem â'r hyn gwelon yn y darlithoedd ac yn C4. Mae ganddo nifer anfeidraidd o ddatrysiadau (ffwythiannau eigen), pob un ohynynt ar ffurf $X_k(x) =$

$\sin(k\pi x/l)$, gyda $k \in \mathbb{N}$. Y gwerthoedd eigen (fel y deillwyd yn y darlith) yw $\lambda_k = (k\pi/l)^2$ ar gyfer $k \in \mathbb{N}$.

Y broblem ar gyfer $T(t)$ (ar gyfer yr achos $\lambda = \lambda_k$ gan ein bod yn canfod datrysiadau annistadl) yw

$$T_k'(t) + c^2\lambda_k T(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Gan ddefnyddio'r dull ffactor integru, gwelwn mai datrysiadau'r hafaliad differol cyffredin trefn un, llinol yma yw

$$T_k(t) = a_k \exp\left(-c^2\lambda_k t\right),$$

lle mae a_k ($k \in \mathbb{N}$) yn gysonion mympwyol. Gan fod yr hafaliad gwres yn llinol homogenaidd, mae'r egwyddor arosodiad yn rhoi bod unrhyw gyfuniad llinol o ddatrysiadau yn ddatrysiad hefyd, felly

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{c^2k^2\pi^2 t}{l^2}\right).$$

Yn olaf mae'n rhaid inni ddarganfod cysonion a_k fel bod $u(x,0) = f(x)$. Hynny yw, darganfod a_k fel bod

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x/l) = f(x); \tag{1}$$

mae hyn yn broblem cyfres Fourier sin. Datryswn drwy gosod $m \in \mathbb{N}$, lluosi'r ddwy ochr o (1) â $\sin(m\pi x/l)$ ac integru mewn perthynas ag x fesul term rhwng 0 ac l. Mae'r canlyniad o C3 yn rhoi

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x.$$

6. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn datrys y broblem gwerth ffin cychwynnol sydd â hafaliad Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in [0,1],\ y \in [0,1]; \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in [0,1]; \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1]; \\ u(x,0) = 4\sin(5\pi x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Datrysiad: Tybiwch fodola ddatrysiad wahanadwy, h.y., canfyddwch u yn y ffurf $u(x,t) = X(x)Y(y)$. Mae amnewid y ffurf yma mewn i'r hafaliad gwres yn rhoi

$$(X(x)Y(y))_{xx} + (X(x)Y(y))_{yy} = 0 \Rightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Mae ad-drefnu yn rhoi

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda, \text{ dyweder,}$$

lle mae $-\lambda$ yn gysonyn gan fod y ddwy ochr o'r hafaliad diwethaf yn ffwythiannau o'r newidynnau annibynnol x ac y yn unig. Mae'r amodau ffin yn ymhlygu bod $X(0) = 0$ ac $X(1) = 0$. Felly gallwn ystyried y broblem ar gyfer $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

I gael (nifer anfeidraidd o) datrysiadau annistad (wedi ei fynegeio gan $n \in \mathbb{N}$), gadewch $\lambda_n = \omega_n^2$. Mae datrys yr hafaliad differol cyffredin trefn dau yn rhoi

$$X_n(x) = A_n \sin(\omega_n x) + B_n \cos(\omega_n x).$$

Mae'r amod $X_n(0) = 0$ yn ymhlygu bod $B_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Ar gyfer datrysiadau annistadl sy'n bodloni $X_n(1) = 0$, $\omega_n = n\pi$, felly

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Y broblem ar gyfer y yw $Y_n''(y) = n^2\pi^2 Y(y)$. Mae datrys yr hafaliadau differeol cyffredin llinol sydd â chyfernodau cyson yn rhoi

$$Y_n(y) = C_n e^{n\pi y} + D_n e^{-n\pi y} = E_n \cosh(n\pi(y-1)) + F_n \sinh(n\pi(y-1))$$

(Mae'r cysonion mympwyol E_n ac F_n yn perthyn i C_n ac D_n trwy $C_n = \frac{1}{2}e^{-n\pi}(E_n + F_n)$ a $D_n = \frac{1}{2}e^{n\pi}(E_n - F_n)$). Mae'r amod $u(x,1) = 0$ yn ymhlygu bod $E_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Mae'r egwyddor arosodiad yn rhoi

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi(y-1)).$$

Yn olaf, mae'r amod $u(x,0) = 4\sin(5\pi x)$ yn rhoi

$$-\sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi) = 4\sin(5\pi x),$$

felly mae $G_5 = -4\text{cosech}(5\pi)$ a $G_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{5\}$. Felly'r datrysiad neilltuol yw

$$u(x,y) = -4\text{cosech}(5\pi) \sin(5\pi x) \sinh(5\pi(y-1)).$$