Datrysiadau 2

2024–25

1. Dosbarthwch yr hafaliadau isod fel rhai parabolig, eliptig neu hyperbolig:
   (a) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + 3u_{yy} - 5u_{yx} + 8u = 0:$ Gan fod $(-3)^2 > 1 \cdot 3$, mae'r hafaliad yn hyperbolig.
   (b) $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0:$ Gan fod $3^2 = 9 \cdot 1$, mae'r hafaliad yn barabolig.
   (c) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0:$ Gan fod $(-2)^2 = 1 \cdot 4$, mae'r hafaliad yn barabolig.

2. Ystyriwch y broblem Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

   (a) Darganfyddwch barth dibyniaeth u yn $(x,t) = (2,1)$.
   (b) Gadewch i $f(x) = 0$ y tu allan i'r cyfwng $[-1,2]$ ac $g(x) = 0$ tu allan i'r cyfwng $[1,6]$. Darganfyddwch y set E o bwyntiau (x,t) fel bod $u(x,t)$ yn sero ar gyfer $(x,t) \in E$.

   Datrysiad.
   (a) Y parth dibyniaeth yw $[x - ct, x + ct] = [x - t, x + t] = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3]$.
   (b) Y tu allan i'r sector lle mae $t > 0$ rhwng y llinellau $x + t = -1$ ac $x - t = 6$, h.y. o fewn $\{(x,t) : t > 0, x < -1 - t \text{ neu } x > t + 6\}$.

3. Darganfyddwch y datrysiad $u(x,t)$ ar gyfer y broblem un dimensiwn isod, sef yr hafaliad ton ar linyn anfeidraidd

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

   gyda
   (a) $f(x) = x$ ac $g(x) = \cos(x)$.
   (b) $f(x) = \ln(x^2 + 6)$ ac $g(x) = 3x^3$.
   (c) $f(x) = \sin(x^3)$ ac $g(x) = \frac{x^2}{x^2+4x+8}$.

   Datrysiad. Datrysir (a), (b) a (c) gan ddefnyddio fformiwla d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

   (a) $u(x,t) = \frac{1}{2}\{(x+ct) + (x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(\lambda)\mathrm{d}\lambda = x + \frac{1}{2c}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct))$.

(b)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\ln((x+ct)^2+6)+\ln((x-ct)^2+6)\} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} 3\lambda^3 \mathrm{d}\lambda.$$

$$= \frac{1}{2}\{\ln((x+ct)^2+6)+\ln((x-ct)^2+6)\} + 3tx(c^2t^2+x^2)$$

(c) Gellir enrhifo'r integryn trwy rannu polynomial, neu trwy nodi fod $\frac{\lambda^2}{\lambda^2+4\lambda+8} = 1 - \frac{4\lambda+8}{\lambda^2+4\lambda+8}$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{\sin((x+ct)^3)+\sin((x-ct)^3)\} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \frac{\lambda^2}{\lambda^2+4\lambda+8}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\{\sin((x+ct)^3)+\sin((x-ct)^3)\} + t$$
$$+ \frac{1}{c}\left(\ln|(x-ct)^2+4(x-ct)+8| - \ln|(x+ct)^2+4(x+ct)+8|\right).$$

4. Gan ddefnyddio'r dull nodweddion, datryswch yr hafaliadau

(a) $2u_x + (\cos x)u_y = 0$, $u(0,y) = e^{-y}$,

(b) $u_x + 2u_y + (2x-y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2$, $u(x,0) = x$ (anoddach!).

Datrysiad. (a) Gallwn ail ysgrifennu'r hafaliad differol rhannol fel $(2, \cos x)\cdot(u_x, u_y) = 0$. Hynny yw, mae'r deilliad cyfeiriedig yn y cyfeiriad $(2, \cos x)$ yn sero, h.y. mae'r datrysiad yn gyson ar hyd y cromliniau nodwedd a ddiffinnir gan yr hafaliad differol cyffredin

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x}{2}.$$

Felly mae'r cromliniau nodwedd ar ffurf $y = \frac{1}{2}\sin x + c$, ac felly mae datrysiadau'r hafaliad differol rhannol ar ffurf $u(x,y) = f(c) = f(y - \frac{1}{2}\sin x)$. Mae'r amod ffin yn awgrymu fod $f(z) = \exp(-z)$, ac felly'r datrysiad yw $u(x,y) = \exp(-y + \frac{1}{2}\sin x)$.

(b) Ystyriwch y cromliniau sydd wedi'i diffinio gan

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2,$$

gydag amodau $x(0) = s$, $y(0) = 0$. Hynny yw,

$$x = t + s, \qquad y = 2t.$$

Mae'r hafaliad differol rhannol yn lleihau i'r hafaliad differol cyffredin

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2su = 2s(s+5t).$$

ar hyd y cromliniau yma. (Rydym wedi ysgrifennu termau yn x a y mewn termau o t a s.) Lluoswch â ffactor integru e^{2st} i gael

$$e^{2st}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2se^{2st}u = 2s(s+5t)e^{2st} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{e^{2st}u\right\} = 2s(s+5t)e^{2st} \Rightarrow e^{2st}u = \frac{(2s^2+10st-5)e^{2st}}{2s} + c(s),$$

(rydym wedi defnyddio integru fesul rhan) felly $u = \frac{2s^2+10st-5}{2s} + c(s)e^{-2st}$. Mae trosi yn ôl i'r newidynnau gwreiddiol x a y yn rhoi

$$u(x,y) = x + 2y - \frac{5}{2x-y} + c(x - \frac{y}{2}) \exp\left(-y\left(x - \frac{y}{2}\right)\right).$$

Yn olaf, mae cymhwyso'r amod ffin yn rhoi bod $c(z) = 5/(2z)$, ac felly

$$u(x,y) = x+2y-\frac{5}{2x-y}+\frac{5}{2x-y}\exp\left(-y\left(x-\frac{y}{2}\right)\right) = x+2y+\frac{5}{2x-y}\left(\exp\left(-y\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)-1\right).$$