Datrysiadau 1

2024–25

1. *(Ymarfer HDC)*: Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol i'r hafaliadau differol cyffredin isod:

   (a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2y}{x} = 3x^3$: Hafaliad differol cyffredin llinol a threfn un yw hwn. Lluoswn â'r ffactor integru $\exp(-\int \frac{2}{x}\mathrm{d}x) = \exp(-2\ln x) = x^{-2}$, sy'n rhoi

   $$x^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2x^{-3}y = 3x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x^{-2}y\right\} = 3x \Rightarrow y = \frac{3x^4}{2} + cx^2,$$

   lle mae c yn gysonyn mympwyol.

   (b) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 0$: Hafaliad differol cyffredin trefn dau, llinol gyda chyfernodau cyson yw hwn. Yr hafaliad ategol yw $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m+1) = 0$ ac felly gwreiddiau'r hafaliad ategol yw $m = -1$ and $m = 3$. Felly'r datrysiad cyffredinol yw $y = Ae^{-x} + Be^{3x}$, lle mae A a B yn gysonion mympwyol.

   (c) $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{x^2y}$: Mae'r hafaliad yn wahanadwy, felly

   $$\int y^2\mathrm{d}y = 3\int x^{-2}\mathrm{d}y + c \Rightarrow \frac{y^3}{3} = c - 3x^{-1} \Rightarrow y = \left(C - \frac{9}{x}\right)^{1/3},$$

   lle mae c, C yn gysonion mympwyol.

   (d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$: $y = Ae^x$ (A yn gysonyn mympwyol, datryswyd naill ai trwy archwiliad, gyda'r ffactor integru e^{-x} neu trwy wahanu's newidynnau).

   (e) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$: Hafaliad differol cyffredin trefn dau, llinol, gyda chyfernodau cyson yw hwn. Yr hafaliad ategol yw $m^2 + 1 = 0$ ac felly'r gwreiddiau yr hafaliad ategol yw $m = \pm i$. Mae'n dilyn bod $y = A\cos x + B\sin x$, lle mae A, B yn gysonion mympwyol.

2. Nodwch drefn pob un o'r hafaliadau isod, a phenderfynwch ymhob achos (gan roi rhesymau) os yw'r hafaliad yn aflinol, anhomogenaidd linol neu'n llinol homogenaidd.

   (a) $u_x + xu_y = \sin x$: Trefn un. Ysgrifennwn yr hafaliad yn y ffurf $Lu = f(x,y)$, lle mae $L = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ a $f(x,y) = \sin x$. Mae'n dilyn o linoledd differu rhannol fod $L(u+v) = Lu + Lv$ ar gyfer unrhyw ffwythiannau C^1, u a v. Ymhellach, mae $L(cu) = cLu$ ar gyfer cysonyn c. Mae L felly yn weithredydd llinol, ac felly mae'r hafaliad differol rhannol yn un anhomogenaidd linol.

   (b) $u_{xx} + uu_x = 0$: Trefn dau. Ysgrifennwn hwn yn y ffurf $Lu = 0$, lle mae $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\cdot)\frac{\partial}{\partial x}$. Mae hwn yn weithredydd aflinol oherwydd y term $(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}$. Gellir gweld hyn trwy nodi fod

   $$L(cu) = \frac{\partial^2(cu)}{\partial x^2} + cu\frac{\partial}{\partial x}(cu) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2u\frac{\partial u}{\partial x} \neq c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = cLu$$

   ar gyfer cysonyn c. Mae'n dilyn fod yr hafaliad differol rhannol yn un aflinol.

(c) $u_x + uu_y = u$: Trefn un. Mae'r hafaliad differol rhannol yn aflinol o ganlyniad i'r term uu_y, yn ôl yr un ddadl ag yn rhan (b).

(d) $u_x + 2u_y + 3 = x$: Trefn un. Gallwn aildrefnu'r hafaliad differol rhannol hwn (gan adael yr holl dermau yn y newidyn dibynnol, u, ar yr ochr chwith a'r termau eraill i gyd ar yr ochr dde) i roi $u_x + 2u_y = x - 3$. Gallwn ysgrifennu'r hafaliad yn y ffurf $Lu = f(x, y)$, lle mae $L = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$ ac $f(x, y) = x - 3$. Gan ddefnyddio llinoledd differu rhannol, nodwn fod L yn weithredydd llinol. Mae'n dilyn fod yr hafaliad differol rhannol yn un anhomogenaidd llinol. (**NB:** mae'r gweithredydd $\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} + 3$ yn aflinol, felly roedd yr aildrefnu gwreiddiol yn bwysig.)

3. Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol $u = u(x, y)$ ar gyfer yr hafaliad differol rhannol $u_{xy} = 3xy$.

   Mae integru yn ôl y yn rhoi $u_x = \frac{3xy^2}{2} + h(x)$ ac integru yn ôl x yn rhoi $u = \frac{3x^2y^2}{4} + \int h(x)\mathrm{d}x + g(y)$. Gan fod integru ffwythiant mympwyol yn x yn rhoi ffwythiant mympwyol arall yn x, gallwn ysgrifennu'r datrysiad cyffredinol fel $u = \frac{3x^2y^2}{4} + f(x) + g(y)$.

4. (a) Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol $u = u(x, t)$ o'r hafaliad differol rhannol

$$4u_x + 3u_t = 0.$$

   Rydym yn defnyddio'r dull nodweddion. Gall yr hafaliad differol rhannol gael ei hysgrifennu yn y ffurf $(4, 3) \cdot \nabla u = 0$. Felly mae u yn gyson ar hyd y cromliniau nodwedd a ddiffinnir gan yr hafaliad differol cyffredin $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}$. Mae gan yr hafaliad yma'r datrysiad $3x - 4t = c$, lle mae $c \in \mathbb{R}$ yn gyson (un cysonyn ar gyfer pob un gromlin nodwedd). Mae'n dilyn mai'r datrysiad cyffredinol yw $u(x, t) = f(c) = f(3x-4t)$, lle mae $f \in C^1(\mathbb{R})$ yn fympwyol.

   (b) Felly, darganfyddwch y datrysiad o'r hafaliad differol rhannol $4u_x+3u_t = 0$ sy'n bodloni'r amod cychwynnol (h.y. ar gyfer $t = 0$): $u(x, 0) = \cos x$.

   Rydym nawr yn gosod yr amod cychwynnol: $u(x, 0) = f(3x) = \cos x$. Rydym yn diddwytho mai'r ffwythiant f yw $f(x) = \cos(x/3)$. Felly, datrysiad yr hafaliad differol rhannol yw $u(x, t) = \cos(x - \frac{4}{3}t)$.

5. Datryswch y broblem gwerth ffin

$$\begin{cases} x^2yu_x + 3u_y = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

   Gallwn ysgrifennu hwn fel $(x^2y, 3) \cdot \nabla u = 0$. Hynny yw, mae datrysiadau yn gyson ar hyd cromliniau sydd â'u tangiad yn gorwedd yn y cyfeiriad $(x^2y, 3)$. Disgrifir y fath gromlin gan yr hafaliad differol cyffredin $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3/(x^2y)$, sy'n wahanadwy. Mae datrysiadau'r hafaliad differol cyffredin ar ffurf $y^2 = c - \frac{6}{x}$. Gan fod u yn gyson ar hyd pob cromlin nodewdd ac mae cromliniau nodwedd gwahanol gyda gwahanol werthoedd ar gyfer c, mae'n dilyn bod $u = f(c) = f(y^2 + 6/x)$. Mae'r amod ffin yn ymhlygu $u(x, 0) = 1/x = f(6/x)$, felly $f(z) = z/6$. Felly'r datrysiad neilltuol yw $u = y^2/6 + 1/x$.

6. Datryswch yr hafaliad llinol $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$.

   Gallwn ysgrifennu'r hafaliad yn y ffurf $(1 + x^2, 1) \cdot \nabla u = 0$. Mae'r cromliniau nodwedd ar gyfer yr hafaliad yn bodloni $dy/dx = 1/(1 + x^2)$. Mae datrys yr hafaliad differol cyffredin yma'n rhoi $y = \arctan x + C$. Mae datrysiadau'r hafaliad differol rhannol yn gyson ar bob un o'r cromliniau nodwedd. Felly, y datrysiad cyffredinol i'r hafaliad differol rhannol yw $u = f(y - \arctan x)$.

7. Datryswch yr hafaliad $(\sqrt{1-x^2})u_x + u_y = 0$ gyda'r amod $u(0, y) = y$.

   Yn debyg i'r uchod, mae'r cromliniau nodwedd ar gyfer yr hafaliad hwn yn bodloni $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$, sydd â'r datrysiad $y = \arcsin x + C$. Felly, mae datrysiadau'n cymryd y ffurf $u(x, y) = f(y - \arcsin x)$. Mae'r amod $u(0, y) = y$ yn golygu fod $f(y) = y$, felly $u(x, y) = y - \arcsin x$ yw'r datrysiad sydd ei angen.

8. Gan ddefnyddio'r dull nodweddion, datryswch $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ gyda $u(x, 0) = 0$.

   Ystyriwch y cromliniau a ddiffinnir gan

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1,$$

   gyda'r amodau $x(0) = s$, $y(0) = 0$. Ar hyd y cromliniau hyn, mae'r hafaliad differol rhannol yn lleihau i'r hafaliad differol cyffredin

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e^{3t+s}.$$

   Lluoswch trwodd â ffactor integru o e^t, i gael

$$e^t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + e^t u = e^{4t+s} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{e^t u\right\} = e^{4t+s} \Rightarrow u = \frac{1}{4}e^{3t+s} + c(s)e^{-t}.$$

   Nodwch fod $t = y$ ac $s = x - y$, felly rydym yn trawsnewid yn ôl i newidynnau'r broblem wreiddiol, sef x ac y, i gael

$$u(x, y) = \frac{1}{4}e^{2y+x} + c(x - y)e^{-y}.$$

   Mae cymhwyso'r amod $u(x, 0) = 0$ yn rhoi bod $c(x) = -\frac{1}{4}e^x$, ac felly'r datrysiad i'r broblem wreiddiol yw

$$u(x, y) = \frac{1}{4}\left(e^{x+2y} - e^{x-2y}\right) = \frac{1}{4}e^x\left(e^{2y} - e^{-2y}\right) = \frac{1}{2}e^x \sinh 2y.$$