Aseiniad 4

Dychwelwch eich atebion i'r cwestiynau ⋆ erbyn diwedd y tymor.

⋆1. Trwy ystyried yr integryn egni

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

profwch fod gan y broblem hafaliad gwres isod ddatrysiad unigryw.

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l,\ 0 \le t < T, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \phi(t), \quad u(l,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

Awgrym: Cymerwch, er mwyn cael gwrthddywediad, fod dau ddatrysiad gwahanol. Pa broblem mae'r gwahaniaeth rhyngddynt yn ei fodloni? Beth yw arwydd $E(t)$? Dangoswch fod $E(t)$ yn ffwythiant lleihaol. Beth yw eich casgliad?

2. Defnyddiwch yr egwyddor macsimwm ar gyfer yr hafaliad gwres $u_t = c^2 u_{xx}$ ar y petryal $R := [0,l] \times [0,T]$, er mwyn profi'r *egwyddor minimwm*: mae datrysiad yr hafaliad gwres ar R yn cyrraedd ei finimwm ar y ffin barabolig $\Pi = ([0,l] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{l\} \times [0,T])$.

   NB: Nid oes angen ail-brofi'r egwyddor macsimwm.

⋆3. Cymerwch fod u yn bodloni'r hafaliad gwres $u_t = u_{xx}$ ar y parth $R = [0,1] \times [0,100]$ gyda'r amodau cychwynnol a'r amodau ffin canlynol

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = te^{-t}, \quad u(1,t) = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$$

Darganfyddwch gysonion m, M fel bod $m \le u(x,t) \le M$ ar gyfer pob $(x,t) \in R$.

⋆4. Cyfrifwch drawsffurf Fourier $e^{-a|x|}$, lle mae $a \in \mathbb{R}$ yn gysonyn.

⋆5. Rhoddir trawsffurf Fourier rhyw ffwythiant $f \in L^1(\mathbb{R})$ gan $\bar{f}(\xi) = c^{-\xi^2/8}$.

   (a) Beth yw trawsffurf Fourier f' (h.y. trawsffurf deilliad f)?

   (b) Defnyddiwch theorem gwrthdroad Fourier i ddarganfod $f(x)$.

   (c) Trwy ddefnyddio'ch atebion i (a) a (b), ynghyad ag unrhyw theoremau neu priodweddau yr ydych yn gwybod sy'n perthnasol i drawsffurf Fourier, diddwythwch y ffwythiant g sydd â thrawsffurf Fourier a roddir gan

$$\bar{g}(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2/4}.$$

   Rhowch eich ateb terfynol ar ffurf gaeedig (h.y. ddim fel integryn) yn echblyg.

6. (a) Gadewch i $f \in L^1(\mathbb{R})$ fod yn ffwythiant â gwerth real. Dangoswch fod ei drawsffurf Fourier, $\bar{f}$, yn bodloni

$$\bar{f}^*(\xi) = \bar{f}(-\xi),$$

lle mae $\bar{f}^*$ yn dynodi cyfiau cymhlyg $\bar{f}$ (dyma'r briodwedd cymesuredd Hermitiaidd).

(b) Diddwythwch berthynas debyg rhwng trawsffurf ffwythiant dychmygol pur g â'i gyfiau cymhlyg.

(c) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o eil-ffwythiant real hefyd yn real.

(d) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o od-ffwythiant yn ddychmygol.

(e) Dangoswch fod trawsffurf Fourier o eil-ffwythiant hefyd yn eil-ffwythiant.

⋆7. Darganfyddwch, mewn perthynas ag x, drawsffurf Fourier y datrysiad i'r broblem gwerth ffin ar gyfer hafaliad Laplace isod:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R},\ y \in [0,1]; \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}; \\ u(x,1) = e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

8. (a) Cyfrifwch drawsffurf Fourier y ffwythiant

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{os yw } x \in [0,1], \\ 0 & \text{fel arall.} \end{cases}$$

(b) Felly (heb ail-gyfrifo'r integryn Fourier) darganfyddwch drawsffurf Fourier y ffwythiant

$$g(x) = \begin{cases} 3 & \text{os yw } x \in [0,2], \\ 0 & \text{fel arall.} \end{cases}$$

9. (Anoddach) Profwch nad yw'r ffwythiant

$$\bar{f}(\xi) = \frac{2\sin(\xi/2)}{\xi}$$

yn perthyn i $L^1(\mathbb{R})$.